This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

A propos de ce livre

Ceci est une copie numérique d'un ouvrage conservé depuis des générations dans les rayonnages d'une bibliothèque avant d'être numérisé avec précaution par Google dans le cadre d'un projet visant à permettre aux internautes de découvrir l'ensemble du patrimoine littéraire mondial en ligne.

Ce livre étant relativement ancien, il n'est plus protégé par la loi sur les droits d'auteur et appartient à présent au domaine public. L'expression "appartenir au domaine public" signifie que le livre en question n'a jamais été soumis aux droits d'auteur ou que ses droits légaux sont arrivés à expiration. Les conditions requises pour qu'un livre tombe dans le domaine public peuvent varier d'un pays à l'autre. Les livres libres de droit sont autant de liens avec le passé. Ils sont les témoins de la richesse de notre histoire, de notre patrimoine culturel et de la connaissance humaine et sont trop souvent difficilement accessibles au public.

Les notes de bas de page et autres annotations en marge du texte présentes dans le volume original sont reprises dans ce fichier, comme un souvenir du long chemin parcouru par l'ouvrage depuis la maison d'édition en passant par la bibliothèque pour finalement se retrouver entre vos mains.

Consignes d'utilisation

Google est fier de travailler en partenariat avec des bibliothèques à la numérisation des ouvrages appartenant au domaine public et de les rendre ainsi accessibles à tous. Ces livres sont en effet la propriété de tous et de toutes et nous sommes tout simplement les gardiens de ce patrimoine. Il s'agit toutefois d'un projet coûteux. Par conséquent et en vue de poursuivre la diffusion de ces ressources inépuisables, nous avons pris les dispositions nécessaires afin de prévenir les éventuels abus auxquels pourraient se livrer des sites marchands tiers, notamment en instaurant des contraintes techniques relatives aux requêtes automatisées.

Nous vous demandons également de:

+ *Ne pas utiliser les fichiers à des fins commerciales* Nous avons conçu le programme Google Recherche de Livres à l'usage des particuliers. Nous vous demandons donc d'utiliser uniquement ces fichiers à des fins personnelles. Ils ne sauraient en effet être employés dans un quelconque but commercial.

+ *Ne pas procéder à des requêtes automatisées* N'envoyez aucune requête automatisée quelle qu'elle soit au système Google. Si vous effectuez des recherches concernant les logiciels de traduction, la reconnaissance optique de caractères ou tout autre domaine nécessitant de disposer d'importantes quantités de texte, n'hésitez pas à nous contacter. Nous encourageons pour la réalisation de ce type de travaux l'utilisation des ouvrages et documents appartenant au domaine public et serions heureux de vous être utile.

+ *Ne pas supprimer l'attribution* Le filigrane Google contenu dans chaque fichier est indispensable pour informer les internautes de notre projet et leur permettre d'accéder à davantage de documents par l'intermédiaire du Programme Google Recherche de Livres. Ne le supprimez en aucun cas.

+ *Rester dans la légalité* Quelle que soit l'utilisation que vous comptez faire des fichiers, n'oubliez pas qu'il est de votre responsabilité de veiller à respecter la loi. Si un ouvrage appartient au domaine public américain, n'en déduisez pas pour autant qu'il en va de même dans les autres pays. La durée légale des droits d'auteur d'un livre varie d'un pays à l'autre. Nous ne sommes donc pas en mesure de répertorier les ouvrages dont l'utilisation est autorisée et ceux dont elle ne l'est pas. Ne croyez pas que le simple fait d'afficher un livre sur Google Recherche de Livres signifie que celui-ci peut être utilisé de quelque façon que ce soit dans le monde entier. La condamnation à laquelle vous vous exposeriez en cas de violation des droits d'auteur peut être sévère.

À propos du service Google Recherche de Livres

En favorisant la recherche et l'accès à un nombre croissant de livres disponibles dans de nombreuses langues, dont le français, Google souhaite contribuer à promouvoir la diversité culturelle grâce à Google Recherche de Livres. En effet, le Programme Google Recherche de Livres permet aux internautes de découvrir le patrimoine littéraire mondial, tout en aidant les auteurs et les éditeurs à élargir leur public. Vous pouvez effectuer des recherches en ligne dans le texte intégral de cet ouvrage à l'adresse `http://books.google.com`

3 3433 06910461 4

ÉTUDES

SUR LES

FORMULES D'INTERPOLATION

PAR

R. RADAU.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

ÉTUDES

SUR LES

FORMULES D'INTERPOLATION.

OIK
Rada

1. Interpolation

s n D

Extrait du *Bulletin astronomique,* juillet, août, septembre et octobre 1891.

ÉTUDES

SUR LES

FORMULES D'INTERPOLATION

PAR

R. RADAU.

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1891

THE NEW YORK
PUBLIC LIBRARY
325921B
ASTOR, LENOX AND
TILDEN FOUNDATIONS
R 1917 L

ÉTUDES

SUR LES

FORMULES D'INTERPOLATION.

Interpoler, c'est compléter, par un procédé rapide, une suite de nombres dont on possède déjà quelques termes. Le mot a été employé pour la première fois, je crois, par Wallis. Par extension, on appelle *formule d'interpolation* une formule obtenue d'une manière empirique, et destinée à tenir lieu d'une fonction de x dont on ne connaît qu'une série de valeurs particulières. C'est alors une formule d'approximation, qui sert à régulariser, à *compenser,* une série d'observations. Géométriquement parlant, c'est déterminer une courbe par un certain nombre de points.

Dans la construction des Tables numériques, dans la recherche des lois de phénomènes accessibles à l'observation, les méthodes d'interpolation sont d'un grand secours et d'une application constante. Pour l'Astronomie, elles ont une importance capitale. C'est ce qui m'a fait penser que la publication des études suivantes, qui résument beaucoup de lectures, coordonnent des résultats connus, et les complètent ou les éclaircissent, ne serait pas dépourvue d'utilité.

Henry Briggs, au commencement du XVIIe siècle, avait déjà eu recours, pour calculer ses logarithmes, à la considération des différences. Plus tard, vers 1670, on trouve un procédé rationnel d'interpolation employé par G. Mouton, de Lyon, pour le calcul des déclinaisons du Soleil. C'est la « méthode de Mouton », que Lagrange a ramenée à un principe très simple, dans son Mémoire de 1792, *sur la Méthode d'interpolation*. Il faut ensuite citer les formules de Newton, dont la première se trouve dans le Livre III des *Principes,* et les autres dans le *Methodus differentialis* (1711). Ses idées sont développées par Cotes (1722), Stirling (1730), Euler, Lagrange.

Laplace, à son tour, applique à la solution de ces sortes de problèmes sa conception des « fonctions génératrices ». Parmi les tra-

Stechert - 8 August. 1945

vaux modernes, relatifs aux mêmes questions, il faut mentionner le Mémoire que Encke a rédigé en 1830, d'après un cours de Gauss auquel il avait assisté en 1812, et qui vient d'être réimprimé, ainsi que le Mémoire posthume de Gauss sur l'interpolation; puis, surtout, les recherches de Cauchy (1835-1853) et celles de M. Tchébychef (1854-1875). Le Rapport de M. Merrifield, présenté à l'Association britannique en 1880 [1], n'en fait point mention.

I.

1. Considérons les deux séries parallèles

$$\begin{array}{cccc} x_0 & x_1 & x_2 & \ldots \\ y_0 & y_1 & y_2 & \ldots \end{array}$$

et désignons par $Dy_0, Dy_1, \ldots, D^2y_0, D^2y_1, \ldots$, ou plus simplement par $D_0, D_1, \ldots, D_0^2, D_1^2, \ldots$ les rapports

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} D_0 = \dfrac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, & D_1 = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, & \ldots, \\ D_0^2 = \dfrac{D_1 - D_0}{x_2 - x_0}, & D_1^2 = \dfrac{D_2 - D_1}{x_3 - x_1}, & \ldots, \\ D_0^3 = \dfrac{D_1^2 - D_0^2}{x_3 - x_0}, & D_1^3 = \dfrac{D_2^2 - D_1^2}{x_4 - x_1}, & \ldots \end{array}\right.$$

dont l'expression générale

$$(2)\qquad D_i^{n+1} = \frac{D_{i+1}^n - D_i^n}{x_{i+n+1} - x_i}$$

a pour dénominateur la différence des valeurs extrêmes de x qui ont encore concouru à la formation de chaque rapport, comme le montre le Tableau

$$\begin{array}{ccccccc} x_0 & y_0 & & & & & \\ & & D_0 & & & & \\ x_1 & y_1 & & D_0^2 & & & \\ & & D_1 & & D_0^3 & & \\ x_2 & y_2 & & D_1^2 & & D_0^4 & \\ & & D_2 & & D_1^3 & & \\ x_3 & y_3 & & D_2^2 & & & \\ & & D_3 & & & & \\ x_4 & y_4 & & & & & \end{array}$$

---

[1] *Report on the present state of knowledge of the application of quadratures and interpolation to actual data.*

En l'écrivant sous cette forme

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) D_0, \qquad D_0 = D_1 + (x_0 - x_2) D_0^2, \qquad \ldots,$$

il saute aux yeux que notre algorithme ne fait que traduire, ou résoudre en ses éléments, la formule d'interpolation

$$y_0 = y_1 + (x_0 - x_1) D_1 + (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) D_1^2 + \ldots,$$

qui devient

$$(3) \qquad \begin{cases} y = y_0 + (x - x_0) D_0 + (x - x_0)(x - x_1) D_0^2 \\ \qquad + (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) D_0^3 + \ldots, \end{cases}$$

si nous mettons $x, y, x_0, y_0, \ldots$ à la place de $x_0, y_0, x_1, y_1, \ldots$, en reculant les indices d'une unité. C'est la formule générale d'interpolation de Newton, à peu près telle qu'on peut la tirer du 5e lemme du Livre III des *Principes* (*Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transit.*)

On peut aussi commencer par poser

$$y = D_0^0 + (x - x_0) D_0^1 + (x - x_0)(x - x_1) D_0^2 + \ldots,$$

d'où

$$\begin{aligned} y_0 &= D_0^0, \\ y_1 &= D_0^0 + (x_1 - x_0) D_0^1, \\ y_2 &= D_0^0 + (x_2 - x_0) D_0^1 + (x_2 - x_0)(x_2 - x_1) D_0^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

de sorte que la signification des constantes D_0^n résulte du rôle même qu'elles jouent dans la formule. Mais nous allons les considérer encore sous un autre aspect.

2. On voit sans peine, en développant, l'une après l'autre, les expressions (1) des quantités D_0^n, qu'on aura

$$D_0 = \frac{y_0}{x_0 - x_1} + \frac{y_1}{x_1 - x_0},$$

$$D_0^2 = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + \frac{y_1}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}$$

et, en général,

$$(4) \quad D_0^n = \frac{y_0}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)} + \ldots + \frac{y_n}{(x_n - x_0)\ldots(x_n - x_{n-1})}.$$

Le rapport D_0^n est donc une fonction symétrique des quantités

$x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$, dont nous sommes libres de permuter les indices. C'est ce qui justifie la nouvelle notation

$$D_0 = (01), \quad D_1 = (12), \quad \ldots, \quad D_0^2 = (012), \quad D_1^2 = (123), \quad \ldots$$

analogue à celle d'Encke dans son Mémoire de 1830, et que fera mieux comprendre le petit Tableau ci-après :

0						
	(01)					
1		(012)				
	(12)		(0123)			
2		(123)		(01234)		
	(23)		(1234)		...	
3		(234		(12345)		...
	...		...		...	...

En écrivant 0, 1, ..., pour $x_0, x_1, \ldots$, on a, par exemple,

$$(0123) = \frac{(012)-(123)}{0-3} = \frac{(012)-(013)}{2-3} = \frac{(023)-(123)}{0-1} = \ldots.$$

Si l'on suppose maintenant que y est une fonction entière de x

$$\begin{aligned} y &= A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \ldots, \\ y_0 &= A_0 + A_1 x_0 + A_2 x_0^2 + \ldots, \end{aligned}$$

il est facile de voir que D_0^n représente la partie entière du développement de l'un quelconque des termes de l'expression (4); on aura, par exemple,

$$(5) \qquad D_0^n = E \frac{y_0}{(x_0 - x_1)\ldots(x_0 - x_n)},$$

ou bien, en développant,

$$\begin{aligned} D_0^n &= E(A_n + A_{n+1} x_0 + \ldots)\left(1 + \frac{x_1}{x_0} + \ldots\right)\ldots\left(1 + \frac{x_n}{x_0} + \ldots\right), \\ D_0^n &= A_n + \ldots + A_p(x_0, x_1, \ldots, x_n)^{p-n} + \ldots. \end{aligned}$$

En appliquant l'opération D^n aux termes successifs de y_0, on voit, en effet, que A_p a en facteur le polynôme

$$(6) \qquad D^n x_0^p = (x_0, x_1, \ldots, x_n)^{p-n}$$

qui se déduit de $(x_0 + x_1 + \ldots + x_n)^{p-n}$ en y remplaçant tous

les coefficients par l'unité. On a, en particulier,

$$D^n x_0^{n+1} = x_0 + x_1 + \ldots + x_n,$$

$$D^n x_0^n = 1, \qquad D^{n+1} x_0^n = 0, \qquad \ldots.$$

Les D s'annulent si leur exposant dépasse celui de x. Si donc y n'est que du degré p, nous aurons $D^{p+1} y_0 = 0$.

Supposons que y soit du degré n,

$$(7) \qquad y = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n.$$

En ajoutant à cette relation celles qui s'en déduisent en remplaçant x, y par $x_0, y_0, \ldots, x_n, y_n$, nous avons $n+2$ équations qui permettent d'éliminer les $n+1$ coefficients $A_0, \ldots, A_n$, et le résultat de l'élimination, c'est l'équation

$$(8) \qquad D^{n+1} y = 0$$

qui, développée à l'aide de la formule (4), devient

$$\frac{y}{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n)} + \frac{y_0}{(x_0-x)(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots + \frac{y_n}{(x_n-x)(x_n-x_0)\ldots(x_n-x_{n-1})} = 0,$$

ou bien

$$(9) \qquad y = y_0 \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_n)}{(x_0-x_1)\ldots(x_0-x_n)} + \ldots.$$

C'est la formule d'interpolation de Lagrange, qui exprime y en fonction de x et des quantités données $x_0, \ldots, x_n, y_0, \ldots, y_n$. Lagrange l'a donnée en 1795, dans ses *Leçons élémentaires* (*Journal de l'Éc. Pol.*, t. II, p. 277). D'après Boole, on la trouve aussi dans Euler (*De eximio usu methodi interpolationum in serierum doctrina*).

Nous avons, d'autre part,

$$D^n y = A_n = \text{const.},$$

et, par suite,

$$(10) \qquad D^n y = D^n y_0,$$

équation qui, développée, devient

$$(11) \quad \begin{cases} y = y_0 + (x-x_0) D y_0 \\ \qquad + (x-x_0)(x-x_1) D^2 y_0 + \ldots + (x-x_0)\ldots(x-x_{n-1}) D^n y_0 \end{cases}$$

C'est la formule d'interpolation de Newton, que nous avons déjà démontrée plus haut [formule (3)].

3. Il faut mentionner ici une Note de M. Emory Mc Clintock, publiée dans le tome II de l'*American Journal of Mathematics* (1879), sous ce titre : *A new general method of interpolation*. L'innovation consiste simplement à introduire, au lieu des rapports (1), les suivants :

$$D_1^1 = \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0}, \qquad D_2^1 = \frac{y_2 - y_0}{x_2 - x_0}, \qquad \ldots,$$
$$D_2^2 = \frac{D_2 - D_1}{x_2 - x_1}, \qquad D_3^2 = \frac{D_3 - D_1}{x_3 - x_1}, \qquad \ldots,$$

dont l'expression générale est

$$D_i^{n+1} = \frac{D_i^n - D_n^n}{x_i - x_n}. \tag{12}$$

On a ensuite

$$y = y_0 + (x - x_0)D_1^1 + (x - x_0)(x - x_1)D_2^2 + \ldots.$$

Ce mode de calcul rend, selon l'auteur, la besogne plus mécanique (*work more mechanical*). On constate aisément que les têtes de séries D_1^1, D_2^2, D_3^3, ... de M. Mc Clintock peuvent être représentées par le second membre de la formule (4), et coïncident, en valeur, avec les rapports que nous avons désignés plus haut par D_0, D_0^2, D_0^3, ...

4. On sait, d'autre part, que la formule de Lagrange a été généralisée par Cauchy. En cherchant à exprimer y, non plus par une fonction *entière*, mais par une fonction *rationnelle* de x, de la forme

$$\frac{a + bx + \ldots + hx^n}{\alpha + \beta x + \ldots + \varepsilon x^m}, \tag{13}$$

il trouve

$$y = \frac{\dfrac{y_0 y_1 \ldots y_m (x - x_{m+1}) \ldots (x - x_{m+n})}{(x_0 - x_{m+1}) \ldots (x_0 - x_{m+n}) \ldots (x_m - x_{m+1}) \ldots (x_m - x_{m+n})} + \ldots}{\dfrac{y_0 y_1 \ldots y_{m-1} (x_0 - x) \ldots (x_{m-1} - x)}{(x_0 - x_m) \ldots (x_0 - x_{m+n}) \ldots (x_{m-1} - x_m) \ldots (x_{m-1} - x_{m+n})} + \ldots}.$$

Cette formule a fait l'objet d'un Mémoire de Brassinne (*Journal*

de Liouville, t. XI, 1846); elle a été aussi étudiée par Jacobi (*Journal de Crelle*, t. XXX, 1845) et par Rosenhain (*ibid.*).

Je me bornerai ici aux remarques suivantes. Si l'on veut utiliser l'expression (13) pour l'interpolation, il convient de mettre le numérateur et le dénominateur sous la forme adoptée par Newton. Posons

$$\begin{aligned} Y_0 &= y_0 + (x - x_0)D_0 + (x - x_0)(x - x_1)D_0^2 + \ldots, \\ Y_1 &= y_1 + (x - x_1)D_1 + (x - x_1)(x - x_2)D_1^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et

$$\alpha(y - Y_0) + \beta(x - x_0)(y - Y_1) + \gamma(x - x_0)(x - x_1)(y - Y_2) + \ldots = 0,$$

d'où

$$y = \frac{\alpha Y_0 + (x - x_0)\beta Y_1 + (x - x_0)(x - x_1)\gamma Y_2 + \ldots}{\alpha + (x - x_0)\beta + (x - x_0)(x - x_1)\gamma + \ldots}$$

ou bien

$$y = \frac{\alpha y_0 + (x - x_0)(\alpha D_0 + \beta y_1) + (x - x_0)(x - x_1)(\alpha D_0^2 + \beta D_1 + \gamma y_2) + \ldots}{\alpha + (x - x_0)\beta + (x - x_0(x - x_1)\gamma + \ldots}.$$

En faisant $m + n = p$, le nombre de valeurs de y dont on aura besoin sera $p + 1$. Si alors on fait successivement $x = x_0, x_1, \ldots, x_p$, le premier membre de l'équation

$$\alpha(y - Y_0) + \beta(x - x_0)(y - Y_1) + \ldots = 0$$

se réduit à 0 pour $x = x_0, \ldots, x_n$, parce que $Y_0, Y_1, \ldots, Y_m$ (qui sont des degrés $n, n - 1, \ldots, n - m$) coïncident avec les valeurs correspondantes de y; mais les substitutions $x = x_{n+1}, \ldots, x_p$ donnent les conditions

$$\begin{aligned} &\alpha D_0^{n+1} + \beta D_1^n + \gamma D_2^{n-1} + \ldots = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &\alpha D_0^p + \beta D_1^{p-1} + \gamma D_2^{p-2} + \ldots = 0, \end{aligned}$$

et l'on a ainsi $m + 1$ équations entre lesquelles on peut éliminer α, β, γ, ... On voit que le dénominateur de y s'obtiendra en formant le déterminant

$$\begin{matrix} 1 & (x - x_0) & (x - x_0)(x - x_1) & \ldots \\ D_0^p & D_1^{p-1} & D_2^{p-2} & \ldots \\ D_0^{p-1} & D_1^{p-2} & D_2^{p-3} & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{matrix}$$

et le numérateur en y remplaçant la première ligne par celle-ci

$$Y_0 \quad (x-x_0)Y_1 \quad (x-x_0)(x-x_1)Y_2 \quad \ldots.$$

La formule ainsi construite pourra être, en quelque sorte, renversée, en remplaçant partout $y, y_0, \ldots$ par $\frac{1}{y}, \frac{1}{y_0}, \ldots$, transformation qui peut aider à la simplifier. On trouve ainsi, par exemple, pour $m = n = 1$, avec trois valeurs données de y,

$$y = \frac{y_0 D_1 + (x-x_0)(D_1 D_0 - y_1 D_0^2)}{D_1 - (x-x_0) D_0^2}$$

ou bien

$$-\frac{y}{y_0 y_1 y_2} = \frac{D\frac{1}{y_1} + (x_0 - x) D^2 \frac{1}{y_0}}{D y_1 + (x_0 - x) D^2 y_0}.$$

5. Dans le cas où $x_0, x_1, \ldots$ forment une série arithmétique, si nous prenons l'intervalle constant $(x_1 - x_0)$ pour unité, nous aurons, en désignant par $\Delta, \Delta^2, \ldots$ les différences successives,

$$D^n = \frac{\Delta^n}{1.2\ldots n}.$$

En faisant $x - x_0 = t$, la formule de Newton devient

$$(14) \quad y_t = y_0 + t\,\Delta y_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2 y_0 + \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots,$$

ou bien

$$y_t = y_0 + t\,\Delta_0 + t_2\,\Delta_0^2 + t_3\,\Delta_0^3 + \ldots,$$

où $t, t_2, t_3, \ldots$ sont les coefficients du binôme. On suppose ici $x > x_0$, $t > 0$. Pour $x < x_0$, on fait $x_0 - x = t$, et la formule devient (en remplaçant t par $-t$)

$$(15) \quad y_{-t} = y_0 - t\,\Delta y_0 + \frac{t(t+1)}{1.2}\Delta^2 y_0 - \frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}\Delta^3 y_0 + \ldots,$$

ou bien

$$y_{-t} = y_0 - t\,\Delta_0 + (t+1)_2\,\Delta_0^2 - (t+2)_3\,\Delta_0^3 + \ldots,$$

ou encore, en avançant les indices,

$$y_0 = y_t - t\,\Delta_t + (t+1)_2\,\Delta_t^2 - (t+2)_3\,\Delta_t^3 + \ldots.$$

On peut donner une remarquable transparence à toutes les formules de cette théorie par l'emploi de la notation symbolique

de Leibniz, que Lagrange a développée dans son Mémoire de 1772 (*Œuvres*, t. III, p. 441), et qui tend à devenir d'un usage courant (*voir* Boole, *Calculus of finite differences*). Dans cette notation,

$$y_1 = (1 + \Delta) y_0,$$

et la formule de Newton s'écrit

$$(16) \qquad y_t = (1 + \Delta)^t y_0,$$

ou bien, si nous omettons y, en désignant y_0 par Δ_0^0, comme le fait Lagrange,

$$y_t = (\Delta^0 + \Delta)_0^t.$$

On aurait de même

$$(17) \qquad y_{-t} = (1 + \Delta)^{-t} y_0, \qquad y_0 = (1 + \Delta)^{-t} y_t.$$

Les différences Δ_0, Δ_0^2, ..., dans ces formules, sont les différences successives qui, dans le Tableau, descendent en diagonale, à partir de y_0,

$$\begin{array}{llll}
y_0 & & & \\
\ldots & \Delta_0 & & \\
y_1 & \ldots & \Delta_0^2 & \\
\ldots & \Delta_1 & \ldots & \Delta_0^3 \\
y_2 & \ldots & \Delta_1^2 & \\
\ldots & \Delta_2 & & \\
y_3 & & &
\end{array}$$

Dans les formules (14) et (15), elles servent respectivement à interpoler en avant et en arrière. Si, pour interpoler en arrière, on voulait suivre une marche rétrograde, symétrique de la marche progressive, il faudrait employer les différences qui montent en diagonale (en changeant le signe des différences d'ordre impair), et les formules (14) et (15) s'écriraient

$$(18) \qquad y_{-t} = y_0 - t\Delta_{-1} + \frac{t(t-1)}{1.2}\Delta_{-2}^2 - \frac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta_{-3}^3 + \ldots,$$

$$(19) \qquad y_t = y^0 + t\Delta_{-1} + \frac{t(t+1)}{1.2}\Delta_{-2}^2 + \frac{t(t+1)(t+2)}{1.2.3}\Delta_{-3}^3 + \ldots;$$

ces transformations s'obtiennent, sans calcul, par l'inspection du Tableau des différences.

6. Reprenons la formule (3), où les intervalles sont quelconques. En écrivant a, b, c, ... à la place de x_0, x_1, x_2, ..., et faisant usage de la nouvelle notation des rapports D^n, qui a été expliquée au n° 2, elle devient

$$(20)\qquad \begin{cases} y = y_a + (x-a)(ab) + (x-a)(x-b)(abc) \\ \qquad + (x-a)(x-b)(x-c)(abcd) + \ldots. \end{cases}$$

Il est clair que les lettres a, b, c, ... pourront représenter les valeurs données de x dans un ordre arbitrairement choisi. Si nous écrivons a, b, a', b', ... au lieu de a, b, c, d, ..., en faisant coïncider la suite naturelle des éléments x avec l'un ou l'autre des deux groupements symétriques

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & a'' & a' & a & b & b' & b'' & \ldots, \\ \ldots & b'' & b' & b & a & a' & a'' & \ldots, \end{array}$$

il est visible que la formule, qui devient alors

$$(21)\qquad \begin{cases} y = y_a + (x-a)(ab) + (x-a)(x-b)(a'ab) \\ \qquad + (x-a')(x-a)(x-b)(a'abb') + \ldots, \end{cases}$$

n'introduit (par une marche en zigzag) que les différences placées immédiatement au-dessus ou au-dessous de la ligne horizontale, menée par le milieu de l'intervalle ab :

$$\begin{array}{cccc|cccc} a' & & & & b' & & & \\ \ldots & (a'a) & & & \ldots & (bb') & & \\ a & \ldots & (a'ab) & & b & \ldots & (abb') & \\ \ldots & (ab) & \ldots & (a'abb') & \ldots & (ab) & \ldots & (a'abb') \\ b & \ldots & (abb') & & a & \ldots & (a'ab) & \\ \ldots & (bb') & & & \ldots & (aa') & & \\ b' & & & & a' & & & \end{array}$$

Cette formule convient surtout lorsque x tombe entre a et b.

Au lieu de varier les groupements, on pourrait aussi en conserver un seul, le premier, et faire, en revanche, des permutations de lettres dans la formule (21). Les deux permutations

$$\begin{array}{ccccccc} \ldots & a'' & a' & a & b & b' & b'' & \ldots \\ \ldots & b' & b & a & a' & a'' & a''' & \ldots \\ \ldots & b'' & b' & b & a & a' & a'' & \ldots \end{array}$$

donneraient respectivement

$$(22)\quad \begin{cases} y = y_a + (x-a)(aa') + (x-a)(x-a')(a'ab) \\ \qquad + (x-a')(x-a)(x-b)(a''a'ab) + \ldots, \end{cases}$$

$$(23)\quad \begin{cases} y = y_b + (x-b)(ab) + (x-a)(x-b)(abb') \\ \qquad + (x-a)(x-b)(x-b')(a'abb') + \ldots. \end{cases}$$

En combinant (21) d'abord avec (22), puis avec (23), on trouverait successivement

$$(24)\quad \begin{cases} y = y_a + (x-a)\dfrac{(ab)+(aa')}{2} + (x-a)\left(x - \dfrac{a'+b}{2}\right)(a'ab) \\ \qquad + (x-a')(x-a)(x-b)\dfrac{(a'abb')+(a''a'ab)}{2} + \ldots, \end{cases}$$

$$(25)\quad \begin{cases} y = \dfrac{y_a+y_b}{2} + \left(x - \dfrac{a+b}{2}\right)(ab) + (x-a)(x-b)\dfrac{(a'ab)+(abb')}{2} \\ \qquad + (x-a)(x-b)\left(x - \dfrac{a'+b'}{2}\right)(a'abb') + \ldots. \end{cases}$$

7. L'aspect de ces formules se simplifie beaucoup lorsque les valeurs données de y sont équidistantes, c'est-à-dire séparées par des intervalles égaux de l'argument x. En faisant $x - a = \pm t$, $b - a = 1$, et confondant a avec x_0, les formules (21) et (22) deviennent

$$(26)\quad \begin{cases} y_t = y_0 + t\Delta_0 + \dfrac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2_{-1} + \dfrac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}\Delta^3_{-1} \\ \qquad + \dfrac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^4_{-2} + \ldots, \\ y_{-t} = y_0 - t\Delta_0 + \dfrac{t(t+1)}{1.2}\Delta^2_{-1} - \dfrac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}\Delta^3_{-1} + \ldots \end{cases}$$

et

$$(27)\quad \begin{cases} y_t = y_0 + t\Delta_{-1} + \dfrac{t(t+1)}{1.2}\Delta^2_{-1} + \dfrac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}\Delta^3_{-2} \\ \qquad + \dfrac{(t+2)(t+1)t(t-1)}{1.2.3.4}\Delta^4_{-2} + \ldots, \\ y_{-t} = y_0 - t\Delta_{-1} + \dfrac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2_{-1} - \dfrac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}\Delta^3_{-2} + \ldots. \end{cases}$$

De même, (23) nous donne

$$(28)\quad \begin{cases} y_t = y_1 + (t-1)\Delta_0 + \dfrac{t(t-1)}{1.2}\Delta^2_0 + \dfrac{t(t-1)(t-2)}{1.2.3}\Delta^3_{-1} \\ \qquad + \dfrac{(t+1)t(t-1)(t-2)}{1.2.3.4}\Delta^4_{-1} + \ldots. \end{cases}$$

Au lieu d'établir ces formules directement par l'interprétation des groupements, on pourrait les déduire des formules (14) et (15) par substitutions successives, en faisant

$$\Delta^2 y_0 = \Delta^2(1+\Delta)y_{-1} = \Delta^2_{-1} + \Delta^3_{-1},$$

et ainsi de suite; mais la marche que nous avons suivie, avec Gauss, est plus simple.

Je ne citerai que pour mémoire la formule de Laplace (*Théorie analytique des Probabilités,* p. 13), qui peut s'écrire

$$y_t = y_0 + t\Delta_{-r} + \frac{t(t+2r-1)}{1.2}\Delta^2_{-2r} + \frac{t(t+3r-1)(t+3r-2)}{1.2.3}\Delta^3_{-3r} + \ldots$$

ou bien

$$y_t = y_0 + t\Delta_r + \frac{t(t-2r-1)}{1.2}\Delta^2_{2r} + \ldots.$$

Par la combinaison des formules (26) et (27), on obtient la suivante, qui correspond à (24),

$$(29)\quad \left\{\begin{aligned} y_t = y_0 &+ t\,\frac{\Delta_0+\Delta_{-1}}{2} + \frac{t^2}{1.2}\Delta^2_{-1} \\ &+ \frac{t(t^2-1)}{1.2.3}\,\frac{\Delta^3_{-1}+\Delta^3_{-2}}{2} + \frac{t^2(t^2-1)}{1.2.3.4}\Delta^4_{-2} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

C'est la formule dite *de Stirling,* mais qui était déjà connue de Newton (Prop. III de la *Méthode différentielle*). Elle est surtout propre à l'interpolation entre un nombre impair de quantités équidistantes. Pour un nombre pair, on aurait la suivante, qui résulte de la combinaison de (26) et (28), et qui correspond à (25)

$$(30)\quad \left\{\begin{aligned} y_t = \frac{y_0+y_1}{2} &+ (t-\tfrac{1}{2})\Delta_0 \\ &+ \frac{t(t-1)}{1.2}\,\frac{\Delta^2_0+\Delta^2_{-1}}{2} + \frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{1.2.3}\Delta^3_{-1} + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Cette formule, que l'on trouve aussi dans Stirling, peut s'écrire, en simplifiant les deux premiers termes,

$$(31)\qquad y_t = y_0 + t\,\Delta_0 + \frac{t(t-1)}{1.2}\,\frac{\Delta^2_0+\Delta^2_{-1}}{2} + \ldots.$$

ou bien encore, en comptant t à partir du milieu de l'intervalle $x_1 - x_0$,

$$(32)\quad \left\{\begin{aligned} y_{t+\frac{1}{2}} = {} & \frac{y_0 + y_1}{2} + t\,\Delta_0 + \frac{t^2 - \frac{1}{4}}{1.2}\,\frac{\Delta_0^2 + \Delta_{-1}^2}{2} \\ & + \frac{t(t^2 - \frac{1}{4})}{1.2.3}\,\Delta_{-1}^3 + \frac{(t^2 - \frac{1}{4})(t^2 - \frac{9}{4})}{1.2.3.4}\,\frac{\Delta_{-1}^4 + \Delta_{-2}^4}{2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

On trouve, dans le *Recueil de Tables astronomiques* de Peters, deux Tables qui facilitent l'application des formules (29) et (31). Pour la formule de Newton, les valeurs des coefficients sont données par Vega, Barlow, etc. *Voir* aussi Woolhouse, *On interpolation* (Londres, 1865).

En faisant $t = 0$, (32) donne la formule connue

$$(33)\qquad y_{\frac{1}{2}} = \frac{y_0 + y_1}{2} - \frac{1}{8}\,\frac{\Delta_0^2 + \Delta_{-1}^2}{2} + \frac{3}{128}\,\frac{\Delta_{-1}^4 + \Delta_{-2}^4}{2} - \ldots$$

8. L'avantage des formules qui précèdent, c'est qu'elles mettent en jeu des différences « symétriques », c'est-à-dire échelonnées le long d'une ligne de symétrie (d'une ligne horizontale) du Tableau, ce qui favorise la convergence. Mais, lorsqu'on s'arrête aux formules (26), (27), la symétrie n'est pas apparente dans les notations, et la marche est alternante : pour passer de Δ_0 à Δ_{-1}^2, l'opération est $\frac{\Delta}{1+\Delta}$, et de Δ_{-1}^2 à Δ_{-1}^3, simplement Δ. Sur la même ligne, rigoureusement, on ne peut passer que de Δ_0 à Δ_{-1}^3, par l'opération $\frac{\Delta^2}{1+\Delta}$, qui ne se dédouble pas :

$$\begin{array}{cccccc} y_{-1} & & & & & \\ \ldots & \Delta_{-1} & \ldots & \Delta_{-2}^3 & \ldots & \\ y_0 & \ldots & \Delta_{-1}^2 & \ldots & \Delta_{-2}^4 & \ldots \\ \ldots & \Delta_0 & \ldots & \Delta_{-1}^3 & \ldots & \\ y_1 & & & & & \end{array}$$

Pour retrouver la symétrie, on a recours aux différences que nous appellerons *médianes* (c'est-à-dire placées sur la ligne médiane du Tableau), en comblant les lacunes par les moyennes arithmétiques des différences de même ordre, placées immédiatement au-dessus et au-dessous de la ligne, comme le montrent les

formules (29) et (30). La ligne menée par le travers de y_0 contient les différences médianes

$$(34)\qquad \frac{\Delta_0+\Delta_{-1}}{2},\quad \Delta^2_{-1},\quad \frac{\Delta^3_{-1}+\Delta^3_{-2}}{2},\quad \Delta^4_{-2},\quad \ldots,$$

tandis que celle qui passe entre y_0 et y_1 renferme

$$(35)\qquad \frac{y_0+y_1}{2},\quad \Delta_0,\quad \frac{\Delta^2_0+\Delta^2_{-1}}{2},\quad \Delta^3_{-1},\quad \frac{\Delta^4_{-1}+\Delta^4_{-2}}{2},\quad \ldots.$$

Afin d'abréger l'écriture, et de mieux marquer la symétrie de l'algorithme de l'interpolation, on introduit souvent, dans la notation des différences, l'argument moyen, qui correspond à la ligne sur laquelle la différence est placée, au lieu de l'argument de départ, qui figure dans l'ancienne notation. Les différences médianes, placées sur une même ligne, ont alors toutes le même argument. Si, pour plus de clarté, nous les désignons par la lettre D, celles qui forment la série (34) s'écriront

$$D(0),\quad D^2(0),\quad D^3(0),\quad D^4(0),\quad \ldots,$$

et celles de la série (35)

$$D^0(\tfrac{1}{2}),\quad D(\tfrac{1}{2}),\quad D^2(\tfrac{1}{2}),\quad D^3(\tfrac{1}{2}),\quad D^4(\tfrac{1}{2}),\quad \ldots$$

ou, si l'on préfère la notation d'Encke,

$$f^{\prime}(0),\quad f^{\prime\prime}(0),\quad f^{\prime\prime\prime}(0),\quad f^{\mathrm{iv}}(0),\quad \ldots$$

et

$$f^{0}(\tfrac{1}{2}),\quad f^{\prime}(\tfrac{1}{2}),\quad f^{\prime\prime}(\tfrac{1}{2}),\quad f^{\prime\prime\prime}(\tfrac{1}{2}),\quad f^{\mathrm{iv}}(\tfrac{1}{2}),\quad \ldots.$$

Hansen, dans un Mémoire de 1865 (*Relationen zwischen Summen und Differenzen*) met l'argument moyen en indice; il écrit, par exemple, $\Delta y_{\frac{1}{2}}$. Cet usage est critiqué par G. Boole, qui le déclare anti-scientifique (*unscientific and wholly in defiance of convention*); mais la notation est commode et ne causera pas de méprises, si l'on a toujours soin de mettre l'argument moyen entre deux parenthèses; avec cette notation, les formules (26) et (27) s'écrivent

$$(36)\quad \begin{cases} y_{\pm t}=y_0\pm t\,D(\pm\frac{1}{2})+\dfrac{t(t-1)}{1.2}D^2(0)\pm\dfrac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}D^3(\pm\frac{1}{2})+\ldots,\\ y_{\pm t}=y_0\pm t\,D(\mp\frac{1}{2})+\dfrac{t(t+1)}{1.2}D^2(0)\pm\dfrac{(t+1)t(t-1)}{1.2.3}D^3(\mp\frac{1}{2})+\ldots,\end{cases}$$

ou bien

$$f(\pm t)=f(0)\pm tf'(\pm\tfrac{1}{2})+t_2 \qquad f''(0)\pm(t+1)_3 f'''(\pm\tfrac{1}{2})+\ldots,$$
$$f(\pm t)=f(0)\pm tf'(\mp\tfrac{1}{2})+(t+1)_2 f''(0)\pm(t+1)_3 f'''(\mp\tfrac{1}{2})+\ldots.$$

La formule de Stirling s'écrit (pour $t \gtrless 0$)

$$(37)\quad y_t=y_0+t\mathrm{D}(0)+\frac{t^2}{1.2}\mathrm{D}^2(0)+\frac{t(t^2-1)}{1.2.3}\mathrm{D}^3(0)+\frac{t^2(t^2-1)}{1.2.3.4}\mathrm{D}^4(0)+\ldots,$$

et la formule (31)

$$(38)\quad y_t=y_0+t\mathrm{D}(\tfrac{1}{2})+\frac{t(t-1)}{1.2}\mathrm{D}^2(\tfrac{1}{2})+\frac{(t-\frac{1}{2})t(t-1)}{1.2.3}\mathrm{D}^3(\tfrac{1}{2})+\ldots.$$

Enfin (33) devient

$$(39)\qquad y_{\frac{1}{2}}=\mathrm{D}^0(\tfrac{1}{2})-\frac{1}{8}\mathrm{D}^2(\tfrac{1}{2})+\frac{3}{128}\mathrm{D}^4(\tfrac{1}{2})-\frac{5}{1024}\mathrm{D}^6(\tfrac{1}{2})+\ldots.$$

La formule de Stirling offre l'avantage de se prêter, avec la même facilité, à l'interpolation en avant et en arrière, puisqu'il suffit de changer le signe des termes d'ordre pair pour l'interpolation en arrière.

En la développant suivant les puissances de t, on trouverait

$$(40)\quad \left\{\begin{aligned} y_t=y_0&+t(\mathrm{D}-\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3+\tfrac{1}{30}\mathrm{D}^5-\ldots)\\ &+t^2(\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^2-\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4+\tfrac{1}{180}\mathrm{D}^6-\ldots)+t^3(\tfrac{1}{6}\mathrm{D}^3-\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^5+\ldots)\\ &+t^4(\tfrac{1}{24}\mathrm{D}^4-\tfrac{1}{144}\mathrm{D}^6+\ldots)+t^5(\tfrac{1}{120}\mathrm{D}^5-\ldots)+\ldots.\end{aligned}\right.$$

9. Pour les applications que nous avons en vue, il importe de nous rendre compte des relations qui existent entre les différences ordinaires Δ et les différences médianes D, dont le caractère mixte s'oppose à l'emploi de l'algorithme habituel.

D'après les définitions du numéro précédent, nous avons

$$\begin{aligned} &\mathrm{D}^0(0)=\Delta_0^0, && \mathrm{D}(0)=\frac{\Delta_0+\Delta_{-1}}{2},\\ &\mathrm{D}^2(0)=\Delta_{-1}^2, && \mathrm{D}^3(0)=\frac{\Delta_{-1}^3+\Delta_{-2}^3}{2},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, && \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &\mathrm{D}^{2n}(0)=\Delta_{-n}^{2n}, && \mathrm{D}^{2n+1}(0)=\frac{\Delta_{-n}^{2n+1}+\Delta_{-n-1}^{2n+1}}{2}.\end{aligned}$$

On aurait aussi, comme il est facile de voir

$$(41)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathrm{D}^{2n}(0)=\Delta_{-n}^{2n}, && \mathrm{D}^{2n+1}(0)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^{2n+2}(0)=\Delta_{-n}^{2n+1},\\ &\mathrm{D}^{2n}(n)=\Delta_0^{2n}, && \mathrm{D}^{2n+1}(n)+\tfrac{1}{2}\mathrm{D}^{2n+2}(n)=\Delta_0^{2n+1},\end{aligned}\right.$$

et par la formule (17)

$$(17)\qquad \Delta^s_{-n} = \Delta^s(1+\Delta)_0^{-n}.$$

Pour simplifier l'écriture, nous supprimerons l'indice o et l'argument (o) toutes les fois que cela pourra se faire sans nuire à la clarté. On trouve alors, en se servant de la formule (17),

$$(42)\qquad \left\{\begin{aligned} 2D &= \Delta + \frac{\Delta}{1+\Delta} = 1+\Delta-(1+\Delta)^{-1},\\ D^2 &= \frac{\Delta^2}{1+\Delta} = 1+\Delta+(1+\Delta)^{-1}-2,\\ (1+\Delta)^{\pm 1} &= 1 \pm D + \tfrac{1}{2}D^2, \qquad \Delta = D + \tfrac{1}{2}D^2. \end{aligned}\right.$$

Pour une différence quelconque, d'ordre pair ou d'ordre impair, on trouve de même

$$(43)\qquad \left\{\begin{aligned} D^{2n} &= \Delta^{2n}(1+\Delta)^{-n} = \left[(1+\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}\right]^{2n},\\ 2D^{2n+1} &= \Delta^{2n+1}\left[(1+\Delta)^{-n} + (1+\Delta)^{-n-1}\right]\\ &= \left[(1+\Delta)-(1+\Delta)^{-1}\right]\left[(1+\Delta)^{\frac{1}{2}} - (1+\Delta)^{-\frac{1}{2}}\right]^{2n}. \end{aligned}\right.$$

On a donc $D^{2n} = (D^2)^n$, et

$$D.D^{2n} = D^{2n+1}, \quad D^2.D^{2n} = D^{2n+2}, \quad \ldots, \quad D^s.D^{2n} = D^{2n+s},$$

mais non pas $(D)^{2n} = D^{2n}$; on ne peut donc associer directement deux exposants impairs, ni élever D à une puissance, comme il est permis de le faire pour D^2. On a ici

$$(44)\qquad \left\{\begin{aligned} D.D &= D^2 + \tfrac{1}{4}D^4,\\ (D)^{2n} &= (D^2 + \tfrac{1}{4}D^4)^n = D^{2n}(1+\tfrac{1}{4}D^2)^n,\\ D.D^{2n+1} &= D^{2n+2} + \tfrac{1}{4}D^{2n+4}. \end{aligned}\right.$$

En développant les expressions (43), on trouve ensuite

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} D^{2n} &= \Delta^{2n} - n\Delta^{2n+1}\\ &\quad + \frac{n(n+1)}{1.2}\Delta^{2n+2} - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\Delta^{2n+3} + \ldots,\\ D^{2n+1} &= \Delta^{2n+1} - (n+\tfrac{1}{2})\Delta^{2n+2}\\ &\quad + \frac{(n+1)^2}{1.2}\Delta^{2n+3} - \frac{(n+1)(n+2)(n+\frac{3}{2})}{1.2.3}\Delta^{2n+4} + \ldots, \end{aligned}\right.$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
D &= \Delta - \tfrac{1}{2}\Delta^2 + \tfrac{1}{2}\Delta^3 - \tfrac{1}{2}\Delta^4 + \ldots,\\
D^2 &= \Delta^2 - \Delta^3 + \Delta^4 - \ldots,\\
D^3 &= \Delta^3 - \tfrac{3}{2}\Delta^4 + 2\Delta^5 - \ldots,\\
D^4 &= \Delta^4 - 2\Delta^5 + 3\Delta^6 - \ldots.
\end{aligned}$$

Pour arriver à exprimer les Δ par les D, nous appliquerons l'opération D^{2n} à la formule de Stirling, en y faisant $t = n$, ce qui nous donne

$$D^{2n}(n) = D^{2n}(o) + n D^{2n+1}(o) + \frac{n^2}{2} D^{2n+2}(o) + \ldots.$$

Le premier membre étant remplacé par $\Delta^{2n}(o)$, nous pouvons supprimer partout l'argument o, et il vient

$$(46) \qquad \Delta^{2n} = D^{2n} + n D^{2n+1} + \frac{n^2}{2} D^{2n+2} + \frac{n(n^2-1)}{2.3} D^{2n+3} + \ldots$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\Delta^{2n} = D^{2n} + n D^{2n+1} &+ \frac{2n}{2n+2}(n+1)_2 D^{2n+2}\\
&+ (n+1)_3 D^{2n+3} + \frac{2n}{2n+4}(n+2)_4 D^{2n+4} + \ldots.
\end{aligned}$$

On a, d'autre part,

$$\Delta^{2n+1} = \Delta.\Delta^{2n} = (D + \tfrac{1}{2}D^2)(D^{2n} + n D^{2n+1} + \ldots),$$

et, en tenant compte des relations (44) dans la rencontre des exposants impairs, on trouve

$$(47) \quad \left\{ \begin{aligned}
\Delta^{2n+1} = D^{2n+1} &+ (n + \tfrac{1}{2}) D^{2n+2}\\
&+ \frac{n(n+1)}{1.2} D^{2n+3} + \frac{n(n+1)(n+\frac{1}{2})}{1.2.3} D^{2n+4} + \ldots
\end{aligned} \right.$$

ou bien

$$\begin{aligned}
\Delta^{2n+1} = D^{2n+1} &+ \frac{2n+1}{2n+2}(n+1) D^{2n+2}\\
&+ (n+1)_2 D^{2n+3} + \frac{2n+1}{2n+4}(n+2)_3 D^{2n+4} + \ldots.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit qu'on aura

$$\begin{aligned}
(1+\Delta)^\mu = 1 &+ \sum_0 D^{2n+1}(\mu_{2n+1} + n.\mu_{2n} + n_2.\mu_{2n-1} + \ldots)\\
&+ \sum_1 D^{2n} \frac{\mu}{2n}[(\mu-1)_{2n-1} + n(\mu-1)_{2n-2} + \ldots].
\end{aligned}$$

Or on a généralement (en désignant toujours par n_p les coefficients de la puissance $n^{\text{ième}}$ du binôme)

$$(\mu + n)_p = \mu_p + n\mu_{p-1} + n_2 . \mu_{p-2} + \ldots .$$

Il s'ensuit que

$$(1 + \Delta)^\mu = 1 + \sum_0 D^{2n+1}(\mu + n)_{2n+1} + \sum_1 D^{2n} \frac{\mu}{2n} (\mu + n - 1)_{2n-1}$$

ou bien

$$(1 + \Delta)^\mu - 1 = \sum_0 \left(D^{2n+1} + \frac{\mu}{2n+2} D^{2n+2}\right)(\mu + n)_{2n+1}.$$

Or les formules (42) montrent qu'on aura $(1 + \Delta)^{-1}$ en remplaçant D par — D dans $(1 + \Delta)$; on trouve donc

$$(43) \quad (1 + \Delta)^{\pm\mu} - 1 = \sum_0 \left(\pm D^{2n+1} + \frac{\mu}{2n+2} D^{2n+2}\right)(\mu + n)_{2n+1}.$$

Cette relation nous sera utile dans la suite.

10. La méthode de Mouton que Lagrange développe dans son Mémoire de 1792 [1] consiste à déterminer, par les différences de la série donnée, celles de la série interpolée, et à remonter de celles-ci aux termes cherchés, de sorte que le calcul se réduit à des additions successives.

Les formules s'établissent très facilement à l'aide de la notation symbolique. Étant donnée une série de termes équidistants T_0, T_1, ..., il s'agit d'interpoler les termes également équidistants t_0, t_1, ..., de façon à subdiviser l'intervalle primitif en m intervalles plus petits. Nous aurons

$$T_0 = t_0, \qquad T_1 = t_m, \qquad T_s = t_{ms},$$

et, en désignant par Δ les différences des T, par δ celles des t,

$$T_1 = (1 + \Delta) T_0, \qquad t_1 = (1 + \delta) t_0,$$

par conséquent

$$(49) \qquad 1 + \Delta = (1 + \delta)^m.$$

---

[1] *Œuvres*, t. V, p. 663. *Voir* aussi le Mémoire de 1778 *Sur les interpolations* (*Œuvres*, t. VII, p. 535) et le Mémoire de 1783 *Sur une méthode particulière d'approximation* (t. V, p. 517).

Il en résulte que

$$\Delta = (1+\delta)^m - 1 = m\,\delta + m_2\,\delta^2 + m_3\,\delta^3 + \ldots$$

et aussi

$$\Delta^s = [(1+\delta)^m - 1]^s = (m\,\delta + m_2\,\delta^2 + \ldots)^s.$$

On trouve ainsi

$$(50)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{1}{m^s}\,\Delta^s &= \delta^s + s\,\frac{m_2}{m}\,\delta^{s+1} + \left(s\,\frac{m_3}{m} + s_2\,\frac{m_2^2}{m^2}\right)\delta^{s+2} + \ldots \\ &= \delta^s + s\,\frac{m-1}{2}\,\delta^{s+1} \\ &\quad + s\,\frac{m-1}{2}\left(\frac{m-2}{3} + \frac{s-1}{2}\,\frac{m-1}{2}\right)\delta^{s+2} + \ldots \end{aligned}\right.$$

Nous avons, d'autre part,

$$(51)\qquad 1+\delta = (1+\Delta)^{\frac{1}{m}}$$

d'où

$$\delta = (1+\Delta)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}\,\Delta + \left(\frac{1}{m}\right)_2 \Delta^2 + \ldots$$

et aussi

$$\delta^s = \left[(1+\Delta)^{\frac{1}{m}} - 1\right]^s = \left[\frac{1}{m}\,\Delta + \left(\frac{1}{m}\right)_2 \Delta^2 + \ldots\right]^s;$$

par conséquent, en remplaçant m par $\frac{1}{m}$ dans (50),

$$(52)\qquad m^s\,\delta^s = \Delta^s + sm\left(\frac{1}{m}\right)_2 \Delta^{s+1} + \left[sm\left(\frac{1}{m}\right)_3 + s_2\,m^2\left(\frac{1}{m}\right)_2^2\right]\Delta^{s+2} + \ldots$$

ou bien

$$\delta^s = \frac{\Delta^s}{m^s} - s\,\frac{m-1}{2}\,\frac{\Delta^{s+1}}{m^{s+1}} + s\,\frac{m-1}{2}\left(\frac{2m-1}{3} + \frac{s-1}{2}\,\frac{m-1}{2}\right)\frac{\Delta^{s+2}}{m^{s+2}} - \ldots.$$

Si Δ^r est la dernière différence sensible ($\Delta^{r+1} = 0$), on aura évidemment

$$(53)\quad \left\{\begin{aligned} \delta^r &= \frac{1}{m^r}\,\Delta^r, \\ \delta^{r-1} &= \frac{1}{m^{r-1}}\,\Delta^{r-1} - \frac{(r-1)(m-1)}{2m^r}\,\Delta^r, \\ \delta^{r-2} &= \frac{1}{m^{r-2}}\,\Delta^{r-2} - \frac{(r-2)(m-1)}{2m^{r-1}}\,\Delta^{r-1} \\ &\quad + \frac{(r-2)(m-1)}{2m^r}\left(\frac{2m-1}{3} + \frac{r-3}{2}\,\frac{m-1}{2}\right)\Delta^r, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}\right.$$

En faisant $s = 1, 2, 3, \ldots$ dans (52), on trouve

$$\delta \doteq \frac{1}{m}\Delta - \frac{m-1}{2m^2}\Delta^2 + \frac{(m-1)(8m-4)}{24m^3}\Delta^3 - \frac{(m-1)(3m-1)(4m-2)}{48m^4}\Delta^4 + \ldots,$$

$$\delta^2 = \frac{1}{m^2}\Delta^2 - \frac{2(m-1)}{2m^3}\Delta^3 + \frac{2(m-1)(11m-7)}{24m^4}\Delta^4 - \frac{2(m-1)(4m-2)(5m-3)}{48m^5}\Delta^5 + \ldots,$$

$$\delta^3 = \frac{1}{m^3}\Delta^3 - \frac{3(m-1)}{2m^4}\Delta^4 + \frac{3(m-1)(14m-10)}{24m^5}\Delta^5 - \frac{3(m-1)(5m-3)(6m-4)}{48m^6}\Delta^6 + \ldots,$$

.....

Le cinquième terme de δ est $+\dfrac{(m-1)(2m-1)(3m-1)(4m-1)}{120m^5}\Delta^5$.

L'expression des différences δ que C.-F. Degen a donnée sans démonstration dans une courte Note (*Astr. Nach.*, n° 15, 1822), cesse d'être exacte pour $s > 3$. Le Verrier a traité le même sujet (*Ann. de l'Obs.*, t. I, p. 126 et 151).

11. Les différences δ sont les différences successives à partir de $t_0(\delta t_0, \delta^2 t_0, \ldots)$, comme les Δ sont les différences successives à partir de T_0, et elles servent à former, par additions répétées, les termes cherchés $t_1, t_2, \ldots$. Dans le Tableau, ces différences descendent en diagonale. Lorsqu'on veut faire usage des différences médianes D, il faut construire un autre algorithme.

Remarquons d'abord qu'en appliquant aux δ les formules (42) il vient

$$(54) \qquad \begin{cases} 2d = 1 + \delta - (1+\delta)^{-1}, \\ d^2 = 1 + \delta + (1+\delta)^{-1} - 2, \end{cases}$$

où $d, d^2, \ldots$ sont les différences médianes pour les intervalles réduits. Or, en vertu de (51), nous avons $1 + \delta = (1+\Delta)^{\frac{1}{m}}$; et, en faisant $\mu = \frac{1}{m}$, (48) nous donne

$$(55) \qquad (1+\delta)^{\pm 1} - 1 = \sum_0 \left(\pm D^{2n+1} + \frac{\frac{1}{m} D^{2n+2}}{2n+2} \right) \left(\frac{1}{m} + n \right)_{2n+1}.$$

En substituant dans (54), on trouve

$$(56)\quad \begin{cases} d = \sum\limits_0 D^{2n+1}\left(\frac{1}{m}+n\right)_{2n+1}, \\ d^2 = \frac{1}{m}\sum\limits_0 \frac{D^{2n+2}}{n+1}\left(\frac{1}{m}+n\right)_{2n+1}, \end{cases}$$

ou bien

$$(57)\quad \begin{cases} d = \frac{1}{m}D + \left(\frac{1}{m}+1\right)_3 D^3 + \left(\frac{1}{m}+2\right)_5 D^5 + \ldots \\ \quad = \frac{1}{m}D - \frac{m^2-1}{6m^3}D^3 + \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{120m^5}D^5 - \ldots \end{cases}$$

et

$$(58)\quad \begin{cases} d^2 = \frac{1}{m^2}D^2 + \frac{1}{2m}\left(\frac{1}{m}+1\right)_3 D^4 + \frac{1}{3m}\left(\frac{1}{m}+2\right)_5 D^6 + \ldots \\ \quad = \frac{1}{m^2}D^2 - \frac{m^2-1}{12m^4}D^4 + \frac{(m^2-1)(4m^2-1)}{360m^6}D^6 - \ldots. \end{cases}$$

De ces expressions fondamentales, les autres d se déduisent par les relations

$$(59)\quad \begin{cases} d^{2n} = (d^2)^n = \frac{1}{m^{2n}}D^{2n} - \frac{n(m^2-1)}{12m^{2n+2}}D^{2n+2} + \ldots, \\ d^{2n+1} = d.d^{2n} = \frac{1}{m^{2n+1}}D^{2n+1} - \frac{(n+2)(m^2-1)}{12m^{2n+3}}D^{2n+3} + \ldots. \end{cases}$$

On aurait, par exemple,

$$d^3 = \frac{1}{m^3}D^3 - \frac{m^2-1}{4m^5}D^5 + \frac{(m^2-1)(7m^2-3)}{120m^7}D^7 - \ldots,$$

$$d^4 = \frac{1}{m^4}D^4 - \frac{m^2-1}{6m^6}D^6 + \frac{(m^2-1)(7m^2-3)}{240m^8}D^8 - \ldots.$$

Il ne faut pas oublier qu'on n'a pas $d.d = d^2$, mais qu'on a $d^2.d^s = d^{2+s}$.

Ces formules sont d'accord avec celles que M. J.-J. Astrand a publiées en 1858 (*A. N.*, 1125) et en 1875 (*Vierteljahrschrift*, t. X, p. 279), mais sans en indiquer complètement la loi. Encke avait traité un problème analogue dans le *Jahrbuch* pour 1852.

En suivant une marche inverse, on pourrait exprimer les D par

les d, et l'on trouverait

$$(60)\quad \begin{cases} D = md + (m+1)_3\, d^3 + (m+2)_5\, d^5 + \ldots, \\ D^2 = m^2 d^2 + \frac{m}{2}(m+1)_3\, d^4 + \frac{m}{3}(m+2)_5\, d^6 + \ldots. \end{cases}$$

Pour $m = 2$, on aurait donc

$$\begin{aligned} D &= 2d + d^3, \\ D^2 &= 4d^2 + d^4, \\ D^3 &= 8d^3 + 6d^5 + d^7, \\ D^4 &= 16d^4 + 8d^6 + d^8, \end{aligned}$$

Ces relations peuvent faciliter le calcul des différences d. Ayant calculé ces dernières pour l'argument o, on trouve les différences δ par les formules

$$\begin{aligned} \delta_{-1} &= d - \tfrac{1}{2}d^2, & \delta^2_{-2} &= d^2 - \delta^3_{-2}, & \delta^3_{-2} &= d^3 - \tfrac{1}{2}d^4, \\ \delta_0 &= d + \tfrac{1}{2}d^2, & \delta^2_{-1} &= d^2, & \delta^3_{-1} &= d^3 + \tfrac{1}{2}d^4. \\ & & \delta^2_0 &= d^2 + \delta^3_{-1}, & & \end{aligned}$$

J'ai dû me borner à démontrer ces diverses formules en renonçant à donner des exemples de calcul, qui auraient pris trop de place.

Quand nous ferons d'autres applications des différences médianes, nous désignerons par la lettre M la moyenne $\frac{1}{2}\left(\Delta + \frac{\Delta}{1+\Delta}\right)$, représentée plus haut par D, et D représentera l'opération fictive $\frac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta}}$. On aura $M = D\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$, et, pour unifier la notation des différences successives, il suffira de diviser par $\sqrt{1 + \frac{1}{4}D^2}$ les développements où figurent $D^{2n+1}(o)$ ou $D^{2n}(\frac{1}{2})$.

12. Avant d'aller plus loin, il convient de faire une remarque qui peut paraître banale, mais qui n'est pas superflue. C'est qu'au lieu de la quantité y dont on connaît une série de valeurs (soit isolées, soit relevées sur un tracé graphique), on peut interpoler telle fonction de y qui s'y prête avec plus de facilité. On peut essayer y^2, ou $\sqrt{y}$, ou $\log y$. Dans beaucoup de cas, surtout dans les problèmes de Physique ou de Statistique, c'est le logarithme

qui est tout indiqué par le caractère général de la courbe. M. Merrifield insiste sur ce point, dans le Rapport que nous avons déjà cité, et dans une Note intitulée *Considerations respecting the translation of series of observations into continuous formulæ* (*Proc. R. Soc.*, nov. 1880). Il rappelle, à ce propos, le passage suivant de Stirling (*Methodus differentialis*, p. 88) : *Nam interpolatio non est temere suscipienda, sed ante exordium operis inquirendum est quænam sit series simplicissima, ex cujus intercalatione pendet ea seriei propositæ. Atque hæc præparatio est magna ex parte omnino necessaria, ut deveniamus ad conclusiones concinnas et elegantes.* C'est là aussi, je crois, le sens d'une remarque de M. Laisant sur la formule d'interpolation de Lagrange (*Bull. de la Soc. math.*, 1891, p. 44).

Dans le cas où la forme de la fonction de x est approximativement connue d'avance, on aura tout avantage à interpoler la différence $y - f(x)$, ou le rapport $\frac{f(x)}{y}$, ou $\log y - \log f(x)$.

Il y a encore une autre remarque à faire. La formule de Lagrange peut s'écrire

$$y = y_a X_a + y_b X_b + \ldots,$$

où les facteurs X s'annulent pour $x = a$, sauf X_a, qui se réduit à l'unité. En posant

$$F(x) = (x-a)(x-b)\ldots(x-l) = (x-a)F_a(x),$$

on peut faire, avec Lagrange,

$$X_a = \frac{F_a(x)}{F_a(a)}.$$

Mais ce choix n'est pas le seul qu'on puisse faire; il est clair qu'on peut remplacer X_a par une fonction de X_a qui s'annule en même temps, ou plus généralement par le produit

$$X_a \frac{\theta(x)}{\theta(a)},$$

où $\theta(x)$ est un polynôme indéterminé, comme l'a fait M. Hermite dans une Note *sur l'Interpolation* (*Comptes rendus*, janv. 1859). Dans une lettre adressée à M. Borchardt (*Journal de Crelle*,

t. 84, 1877), M. Hermite indique une autre généralisation de la formule de Lagrange, qu'il obtient en cherchant à représenter par un polynôme F du degré $n-1$, non seulement la fonction donnée $f(x)$, mais encore ses premières dérivées, de sorte que, par exemple, $f(a)$, $f'(a)$, ..., $f^{\alpha-1}(a)$ coïncident avec $F(a)$, $F'(a)$, ..., $F^{\alpha-1}(a)$. On peut consulter, à ce sujet, une Note de M. V. Williot (*Bull. des Sciences math.*, octobre 1890).

Pour étendre la formule de Lagrange au cas de deux variables x, y, on sait qu'il suffit d'assimiler y à x, en posant

$$f(x, y) = \Sigma X_i Y_i f(x_i, y_i),$$

où les facteurs X_i et Y_i sont de forme semblable.

Il y a quelques années, à propos d'un travail de M. Weyer (*Astr. Nachr.*, 2804), j'ai montré comment la formule de Lagrange se transforme quand le nombre des ordonnées y_n devient infini, et en particulier quand ces ordonnées forment une suite périodique où un groupe de m ordonnées se reproduit indéfiniment; les coefficients se changent alors en fonctions trigonométriques (voir *Bull. astr.*, t. IV, p. 515).

Mais je laisserai de côté l'interpolation par les séries trigonométriques, dont Lagrange, on le sait, s'est occupé à plusieurs reprises (*Recherches sur la manière de former des Tables des planètes d'après les seules observations*, 1772; *Œuvres*, t. VI, p. 507; *Sur les interpolations*, 1780; *Œuvres*, t. VII, p. 541). Il y aurait à citer la formule de Walbeck (*Corresp. astr.*, 1820), celle de Bessel (*Astr. Nachr.*, n° 136; 1828); puis la méthode que Le Verrier a développée dans le tome I des *Annales de l'Observatoire* (1855) et dont, peu de temps après, Encke a donné un exposé dans le *Jahrbuch* (1860). M. Hoüel s'en est occupé à son tour (*Comptes rendus*, 1861; *Ann. de l'Obs.*, t. VIII, 1865).

Le problème a été résolu par Gauss, d'une manière beaucoup plus simple, dans le Mémoire posthume intitulé : *Theoria interpolationis methodo nova tractata* (*Œuvres*, t. III, p. 265), où l'on trouve la formule

$$y = y_a \frac{\sin\frac{x-b}{2}\sin\frac{x-c}{2}\cdots\sin\frac{x-l}{2}}{\sin\frac{a-b}{2}\sin\frac{a-c}{2}\cdots\sin\frac{a-l}{2}} + \ldots,$$

qui peut tenir lieu de la série

$$y = \alpha + \alpha' \cos x + \alpha'' \cos 2x + \ldots$$
$$+ \beta' \sin x + \beta'' \sin 2x + \ldots.$$

II.

13. Dans beaucoup de cas, la recherche des coefficients d'une formule d'interpolation se ramène à la résolution d'un système d'équations linéaires.

L'introduction des déterminants est un excellent moyen d'élucider la théorie de l'élimination; mais, lorsqu'il s'agit de calculs numériques, on préférera toujours le procédé ordinaire de l'élimination successive des inconnues. Ce procédé peut d'ailleurs être présenté sous une forme élégante, en suivant les prescriptions de Gauss ou celles de Cauchy.

Supposons d'abord qu'on ait à déterminer m inconnues $x, y, z, \ldots, t$ par m équations linéaires

$$(1) \qquad \begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + \ldots + H_1 t = F_1, \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + \ldots + H_2 t = F_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dont nous représenterons l'une quelconque par l'équation typique

$$(\mathrm{I}) \qquad Ax + By + Cz + \ldots + Ht = F.$$

On commence par éliminer x, en retranchant de chaque expression F la première F_1, multipliée par le rapport $\frac{A}{A_1}$ des coefficients respectifs de x, et l'on obtient $m - 1$ équations de la forme

$$(\mathrm{II}) \qquad y\,\Delta B + z\,\Delta C + \ldots + t\,\Delta H = \Delta F,$$

les différences premières Δ étant définies par les relations

$$\Delta A = 0, \quad \Delta B = B - \frac{A}{A_1} B_1, \quad \Delta C = C - \frac{A}{A_1} C_1, \quad \ldots, \quad \Delta F = F - \frac{A}{A_1} F_1,$$

de sorte que $\Delta B_1, \Delta C_1, \ldots, \Delta F_1$ s'annulent évidemment. L'élimination de y entre les expressions $\Delta F_2, \Delta F_3, \ldots, \Delta F_m$ donne $m - 2$ équations nouvelles du type

$$(\mathrm{III}) \qquad z\,\Delta^2 C + \ldots + t\,\Delta^2 H = \Delta^2 F,$$

en faisant

$$\Delta^2 B = 0, \qquad \Delta^2 C = \Delta C - \frac{\Delta B}{\Delta B_2}\Delta C_2, \qquad \ldots, \qquad \Delta^2 F = \Delta F - \frac{\Delta B}{\Delta B_2}\Delta F_2,$$

et ainsi de suite. Il est visible que ΔF_1; $\Delta^2 F_1$, $\Delta^2 F_2$; .. , $\Delta^m F_1, \ldots, \Delta^m F_m$ sont nulles par définition.

On arrive finalement au système

$$\text{(IV)} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} xA + yB + zC + \ldots + tH & = F, \\ \quad y\Delta B + z\Delta C + \ldots + t\Delta H & = \Delta F, \\ \qquad z\Delta^2 C + \ldots + t\Delta^2 H & = \Delta^2 F, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & , \\ \qquad\qquad t\Delta^{m-1} H & = \Delta^{m-1} F, \end{array} \right.$$

dont la première ligne représente m équations, la seconde $m - 1$, et la dernière une seule, comme le montre le Tableau suivant des seconds membres

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} F_1, & F_2, & F_3, & \ldots, & F_m, \\ & \Delta F_2, & \Delta F_3, & \ldots, & \Delta F_m, \\ & & \Delta^2 F_3, & \ldots, & \Delta^2 F_m, \\ & & \ldots, & \ldots, & \ldots, \\ & & & & \Delta^{m-1} F_m. \end{array} \right.$$

Pour le calcul des inconnues x, y, z, il suffit de prendre la première équation de chaque type, à savoir celles dont les seconds membres sont

$$(3) \qquad F_1, \quad \Delta F_2, \quad \Delta^2 F_3, \quad \ldots, \quad \Delta^{m-1} F_m,$$

en remontant de la dernière à celles qui la précèdent; elles fournissent ainsi, l'une après l'autre, les valeurs de $t, \ldots, z, y, x$.

Si les inconnues sont liées entre elles par n équations de la forme

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z + \ldots + h_1 t = f_1, \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z + \ldots + h_2 t = f_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array} \right.$$

dont le nombre surpasse celui des inconnues ($n > m$), ces équations sont, en général, simplement approchées, et ne deviendraient exactes qu'en remplaçant f par $f - \varepsilon$, où ε représente l'erreur de f. Il faut alors commencer par en déduire un système d'équa-

tions finales en nombre *égal* à celui des inconnues; ce qui peut se faire de deux manières.

On peut, d'une part, en ajoutant les équations (4) après les avoir multipliées par des facteurs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$, former un système de m équations linéaires tel que le système (1), et en déduire les équations finales (3). En partant de l'équation type

$$ax + by + cz + \ldots + ht = f,$$

et nous servant de la notation de Gauss

$$(\alpha\beta) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n,$$

les *sommes pondérées* des équations primitives pourront s'écrire

$$(5)\qquad \begin{cases} (\lambda a)x + (\lambda b)y + (\lambda c)z + \ldots = (\lambda f) = F_1, \\ (\mu a)x + (\mu b)y + (\mu c)z + \ldots = (\mu f) = F_2, \\ (\nu a)x + (\nu b)y + (\nu c)z + \ldots = (\nu f) = F_3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

L'élimination successive de x, de y, de z, ... donne des séries d'équations telles que les suivantes

$$(6)\qquad \begin{cases} (\mu b.1)y + (\mu c.1)z + \ldots = (\mu f.1), \\ (\nu b.1)y + (\nu c.1)z + \ldots = (\nu f.1), \\ \qquad\qquad (\nu c.2)z + \ldots = (\nu f.2), \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

où, d'après la notation de Gauss,

$$(\mu f.1) = (\mu f) - \frac{(\mu a)}{(\lambda a)}(\lambda f), \qquad \ldots,$$

$$(\nu f.2) = (\nu f.1) - \frac{(\nu b.1)}{(\mu b.1)}(\mu f.1), \qquad \ldots.$$

Avec la notation de Cauchy, qui représente par Δ, Δ^2, ... des « espèces de différences finies de divers ordres », ces expressions deviennent

$$\Delta F_2 = \Delta(\mu f) = (\mu f) - (\mu a)\frac{(\lambda f)}{(\lambda a)},$$

$$\Delta^2 F_3 = \Delta^2(\nu f) = \Delta(\nu f) - \Delta(\nu b)\frac{\Delta(\mu f)}{\Delta(\mu b)},$$

et il est visible qu'elles peuvent être mises sous la forme

$$\Delta F_2 = (\mu\,\Delta f), \qquad \Delta^2 F_3 = (\nu\,\Delta^2 f), \qquad \ldots,$$

en posant

$$\Delta f = f - a\,\frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}, \qquad \Delta^2 f = \Delta f - \Delta b\,\frac{(\mu\,\Delta f)}{(\mu\,\Delta b)}, \qquad \ldots,$$

ce qui, à la vérité, modifie légèrement le sens du signe d'opération Δ.

Il faut se garder de confondre le symbole Δ, employé ici, avec celui des différences finies ordinaires, où $\Delta.\Delta = \Delta^2$. Les Δ sont ici des coefficients d'élimination. Ainsi Δ^2 naît de l'élimination de x, y entre les équations

$$\begin{aligned} F &= Ax + By + \ldots, \\ F_1 &= A_1 x + B_1 y + \ldots, \\ F_2 &= A_2 x + B_2 y + \ldots, \end{aligned}$$

et l'opération se fait comme si les autres inconnues n'existaient pas. En désignant par $[ab_1]$ le déterminant formé avec les éléments $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}$, on trouve

$$\begin{aligned} \Delta F &= F - \frac{A}{A_1}\,F_1 = \frac{[FA_1]}{A_1}, \\ \Delta^2 F &= \Delta F - \frac{\Delta B}{\Delta B_2}\,\Delta F_2 = \frac{[FA_1B_2]}{[A_1B_2]}, \\ \Delta^3 F &= \Delta^2 F - \frac{\Delta^2 C}{\Delta^2 C_3}\,\Delta^2 F_3 = \frac{[FA_1B_2C_3]}{[A_1B_2C_3]}, \end{aligned}$$

et ainsi de suite. On voit que les Δ sont des fonctions symétriques des coefficients qui y sont contenus.

Les quantités $(\mu\,\Delta f)$, $(\nu\,\Delta^2 f)$, ... sont composées d'une manière analogue, les éléments des déterminants étant les coefficients (λf), (μf), ..., (λa), (μa), ..., (λb), (μb), ...

Il nous semble que l'emploi du signe Δ aide à régler la marche des opérations.

On se trouve ainsi conduit (comme l'a remarqué Bienaymé) au mode d'élimination fondé sur l'algorithme de Cauchy.

14. On peut, en effet, avec Cauchy, établir directement les équations finales sans passer par toute la série des expressions (5).

Pour cela, remarquons d'abord qu'en éliminant successivement x, y, z, ... des équations (4), on peut écrire à la fois le système des relations approchées (où chaque ligne représente n équations)

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} xa + yb + zc + \ldots + th = f, \\ \qquad y\,\Delta b + z\,\Delta c + \ldots + t\,\Delta h = \Delta f, \\ \qquad\qquad z\,\Delta^2 c + \ldots + t\,\Delta^2 h = \Delta^2 f, \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad t\,\Delta^{m-1} h = \Delta^{m-1} f, \end{array}\right.$$

et le système d'équations définitives

$$(8)\quad \left\{\begin{array}{l} x(\lambda a) + y(\lambda b) + z(\lambda c) + \ldots + t(\lambda h) = (\lambda f), \\ \qquad y(\mu\,\Delta b) + z(\mu\,\Delta c) + \ldots + t(\mu\,\Delta h) = (\mu\,\Delta f), \\ \qquad\qquad z(\nu\,\Delta^2 c) + \ldots + t(\nu\,\Delta^2 h) = (\nu\,\Delta^2 f), \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right.$$

qui se déduisent l'un de l'autre, ligne après ligne, les différences Δ étant formées comme il suit :

$$\Delta f = f - \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}\,a, \qquad \Delta^2 f = \Delta f - \frac{(\mu\,\Delta f)}{(\mu\,\Delta b)}\,\Delta b, \qquad \ldots.$$

La première des équations (8) est la somme pondérée des n équations contenues dans la première ligne de (7); combinée avec celles-ci, elle sert à former les n équations que représente la seconde ligne de (7), et dont la somme pondérée fournit la seconde équation du système (8). Celle-ci, à son tour, sert à déduire la troisième ligne de (7) de la seconde; cette troisième ligne fournit la troisième équation (8), et ainsi de suite.

Pour abréger, nous introduirons les notations nouvelles [1]

$$(9)\quad \left\{\begin{array}{llll} \varphi = \dfrac{(\lambda f)}{(\lambda a)}, & \varphi' = \dfrac{(\mu\,\Delta f)}{(\mu\,\Delta b)}, & \varphi'' = \dfrac{(\nu\,\Delta^2 f)}{(\nu\,\Delta^2 c)}, & \ldots, \\ \Delta f = f - \varphi a, & \Delta^2 f = \Delta f - \varphi'\,\Delta b, & \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi''\,\Delta^2 c, & \ldots, \end{array}\right.$$

---

[1] Il faut dire que la notation que nous avons adoptée n'est pas tout à fait celle de Cauchy, qui écrit, par exemple,

$$\Delta f = f - \alpha(\lambda f), \qquad \alpha = \frac{a}{(\lambda a)};$$

mais les formules gagnent en symétrie par l'introduction des rapports φ.

qui entraînent ces formules d'*opérations*

$$(10)\qquad \begin{cases} (\lambda\,\Delta) = 0, & (\lambda\,\Delta^2) = 0, & (\mu\,\Delta^2) = 0, \\ (\lambda\,\Delta^3) = 0, & (\mu\,\Delta^3) = 0, & (\nu\,\Delta^3) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On a, en effet, par définition,

$$(\lambda\,\Delta f) = (\lambda f) - \varphi(\lambda a) = 0, \qquad \ldots.$$

En désignant toujours par α, β, γ, ... les rapports φ pour $f = a$, b, c, ..., on trouve

$$(11)\qquad \begin{cases} \alpha = 1, \\ \beta = \dfrac{(\lambda b)}{(\lambda a)}, & \beta' = 1, \\ \gamma = \dfrac{(\lambda c)}{(\lambda a)}, & \gamma' = \dfrac{(\mu\,\Delta c)}{(\mu\,\Delta b)}, & \gamma'' = 1, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(12)\qquad \begin{cases} \Delta a = 0, \\ \Delta b = b - \beta a, & \Delta^2 b = 0, \\ \Delta c = c - \gamma a, & \Delta^2 c = \Delta c - \gamma' \Delta b, & \Delta^3 c = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

le système (8) peut s'écrire

$$(13)\qquad \begin{cases} x + y\beta + z\gamma + \ldots + t\tau = \varphi, \\ \qquad y \quad + z\gamma' + \ldots + t\tau' = \varphi', \\ \qquad\qquad z \quad + \ldots + t\tau'' = \varphi'', \\ \qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

et les formules (9) donnent immédiatement

$$(14)\qquad \begin{cases} f = \varphi a + \varphi' \Delta b + \varphi'' \Delta^2 c + \ldots, \\ \Delta f = \qquad\quad \varphi' \Delta b + \varphi'' \Delta^2 c + \ldots, \\ \Delta^2 f = \qquad\qquad\qquad \varphi'' \Delta^2 c + \ldots, \end{cases}$$

15. Le procédé d'élimination qui vient d'être exposé donne les équations finales pour la détermination des inconnues sous une forme très simple. Ainsi que l'a fait déjà remarquer M. Bienaymé, il convient également à la méthode des moindres carrés et à la méthode de Cauchy : la différence est dans le choix des facteurs λ, μ, ν, ... qui servent à former les sommes pondérées des équations approximatives (7).

La méthode des moindres carrés veut qu'on fasse $\lambda = a$, $\mu = b$, $\nu = c$, ..., en d'autres termes, que l'on prenne pour les poids λ, μ, ν, ... les coefficients mêmes des inconnues. Ce choix est conforme aux principes du Calcul des probabilités [1].

De son côté, Cauchy, s'inspirant d'une règle ancienne, prend tous les facteurs égaux à ± 1, le signe étant celui du coefficient de l'inconnue qui doit être éliminée la première, de sorte que, dans l'équation finale, cette inconnue a toujours pour coefficient une somme de termes positifs. Ainsi, dans le système (8), les coefficients (λa), $(\mu \Delta b)$, $(\nu \Delta^2 c)$, ..., qu'il désigne par

$$Sa,\ S'\Delta b,\ S''\Delta^2 c,\ \ldots,$$

représentent les sommes des *valeurs numériques* de a, Δb, $\Delta^2 c$, ... et l'on a

$$(\lambda a) = Sa \quad = \Sigma \pm a,$$
$$(\mu \Delta b) = S'\Delta b = \Sigma \pm \Delta b,$$

le signe inférieur étant adopté toutes les fois que a, Δb, ... sont négatifs. Il en résulte donc que les dénominateurs des expressions (9) et (11) sont toujours des sommes de termes positifs et, par suite, aussi grands que possible (en les supposant obtenus par voie d'addition). Quant aux numérateurs

$$(\lambda f) = Sf \quad = \Sigma \pm f,$$
$$(\mu \Delta f) = S'\Delta f = \Sigma \pm \Delta f,$$

le choix des signes y est tout indiqué, puisque les facteurs λ, μ, ν, ... se déterminent par les dénominateurs. Pour caractériser d'un mot cette dépendance, Yvon Villarceau, dans l'exposé qu'il a fait de la méthode de Cauchy, propose de nommer *dominante* la fonction qui règle les changements de signe dans les autres fonctions, et il appelle S, S', S'', ... les sommes *subordonnées* aux dominantes a, Δb, $\Delta^2 c$, ...

Par l'emploi de ces facteurs, dont chacun se réduit (au signe

---

[1] Ajoutons que, suivant une remarque de Jacobi, les valeurs des inconnues que l'on tire d'un système d'équations en nombre surabondant, par l'application de la méthode des moindres carrés, sont des moyennes pondérées des valeurs que l'on obtiendrait en formant, de toutes les manières possibles, des groupes d'équations en nombre strictement suffisant (*Journal de Crelle*, t. 22).

près) à l'unité, Cauchy obtient les valeurs de x, y, ... pour lesquelles, dans un certain sens, « la plus grande erreur à craindre est la moindre possible. » Il n'en est pas moins vrai, comme on l'a fait remarquer avec raison, que ce choix des facteurs ne fournit pas, en général, les valeurs les plus probables. On se rapprocherait davantage du principe des probabilités en suivant la règle recommandée par Le Verrier (*Ann. de l'Obs.*, t. I, p. 135-137), qui revient à partager les équations en groupes d'après l'importance du coefficient de l'inconnue à éliminer, et à multiplier ces groupes par $0, \pm\frac{1}{10}, \pm\frac{2}{10}, \ldots, \pm\frac{9}{10}, \pm 1$ (ou par $0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm 9, \pm 10$). Cette marche abrégée ne fait presque rien perdre de la précision du résultat. Il suffira même, bien souvent, de faire $\lambda = 0$ ou $\lambda = \pm 1$ suivant le cas, en supprimant les équations où le coefficient de l'inconnue sera moindre que le tiers du plus grand coefficient analogue, et en prenant $\lambda = \pm 1$ pour les autres. M. Tisserand a justifié ce procédé par des considérations tirées du Calcul des probabilités (*voir* Brunnow, *Astronomie pratique*, p. 213).

16. Comme nous l'avons déjà dit, pour rendre les équations (4) exactes, il faut mettre $f - \varepsilon$ à la place de f et, par suite, écrire $\Delta f - \Delta\varepsilon$ au lieu de Δf, ... L'élimination de la dernière inconnue t du système (7), qui donnerait l'équation approximative $0 = \Delta^m f$ (puisque $\Delta^m h = 0$ par définition), donnera donc exactement

$$0 = \Delta^m f - \Delta^m \varepsilon, \qquad \Delta^m f = \Delta^m \varepsilon,$$

c'est-à-dire que $\Delta^m f$ sera d'*autant plus petit* que les équations (4) seront *plus exactes* [1].

Dès lors, *si le nombre m des inconnues à déterminer n'est pas donné* a priori (ce qui arrive, par exemple, si ce sont les coefficients d'une formule d'interpolation, destinée à représenter des valeurs observées f_1, f_2, ...), on pourra se servir de l'algorithme du n° 14 pour en déterminer d'abord une, puis deux, trois, etc., jusqu'à ce que le nombre en soit assez grand pour rendre les résidus $\Delta^m f$ comparables aux erreurs d'observation.

---

[1] C'est Δ^m qu'il faut considérer, et non Δ^{m+1}, comme le fait Cauchy par inadvertance, dans les Notes de 1853.

On commencera par supposer

$$f = ax,$$

en faisant $y = 0$, $z = 0$, ..., et le système (13) donnera

$$x = \varphi,$$

en première approximation. Dans la méthode de Cauchy, le rapport $\varphi = \frac{(\lambda f)}{(\lambda a)}$ devient

$$\varphi = \frac{Sf}{Sa},$$

où $Sa = \Sigma \pm a$ est la somme des valeurs numériques de a, et $Sf = \Sigma \pm f$, les changements de signe du numérateur étant réglés sur ceux du dénominateur, dont tous les termes deviennent positifs. Ensuite on formera les résidus

$$\Delta f = f - a\varphi,$$

dont la combinaison $(\lambda \Delta f)$ ou $S\Delta f$ doit s'annuler, ce qui fournit une vérification du calcul. S'il y a lieu, on procède à la seconde approximation, en posant

$$f = ax + by,$$

et le système (13) donnera

$$x + \beta y = \varphi,$$
$$y = \varphi',$$

où

$$\beta = \frac{Sb}{Sa}, \qquad \varphi' = \frac{S'\Delta f}{S'\Delta b}, \qquad \Delta b = b - \beta a.$$

Les relations (14) donnent d'ailleurs

$$f = \varphi a + \varphi' \Delta b.$$

On peut continuer de cette manière, jusqu'à ce que les résidus $\Delta^m f$ paraissent suffisamment petits.

17. Présentée de cette manière, la méthode de Cauchy se rattache très naturellement aux procédés d'élimination plus anciens, dont elle constitue une ingénieuse modification. Je n'ai pas voulu en interrompre l'exposé par des remarques relatives à l'historique de la question, qu'il y a lieu de placer ici.

Le *Mémoire sur l'Interpolation,* qui avait été autographié à Prague, en 1835, a été reproduit en 1837 dans le tome II du *Journal de Mathématiques* de Liouville, mais sans l'exemple numérique qui le terminait. En 1847, Cauchy a donné un résumé de sa méthode et des applications qu'elle comporte dans une série de Mémoires sur la détermination des orbites, insérés au tome XXV des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (p. 405, 531, 572, 650). A son tour, en 1849, Yvon Villarceau a étudié cette méthode dans les *Additions à la Connaissance des Temps* pour 1852 [*voir* aussi *Annales de l'Observatoire de Paris* (*Obs.*), t. XII, 1856].

En 1853, la méthode donne lieu à une intéressante polémique entre Cauchy et J. Bienaymé, qui a beaucoup contribué à la mettre dans son vrai jour. Une Note de Cauchy *sur l'évaluation d'inconnues déterminées par un grand nombre d'équations* (*Comptes rendus,* 27 juin, p. 1114) est suivie d'une Note de Bienaymé *sur les différences qui distinguent l'interpolation de M. Cauchy de la méthode des moindres carrés* (*Comptes rendus,* 4 juillet, p. 5; *Journal de Liouville,* t. XVIII), à laquelle répondent un *Mémoire sur l'Interpolation* et une Note *sur la nouvelle méthode d'interpolation comparée à la méthode des moindres carrés* (*Comptes rendus,* 18 juillet, p. 64, et 25 juillet, p. 100). Bienaymé prétend que le procédé en question n'est qu'une modification de l'élimination ordinaire entre plusieurs équations du premier degré; « qu'il n'offre aucun degré spécial de probabilité quand on l'applique à des équations plus nombreuses que les inconnues; qu'au contraire il ajoute alors aux risques d'erreur et n'en assigne pas la mesure... » Pour le démontrer, il fait voir, notamment, que les résidus $\Delta\varepsilon$ pourront grandir au lieu de décroître dans la suite des calculs, de sorte que rien ne garantit que les erreurs n'iront pas en croissant. On en voit un exemple, dit-il, dans l'interpolation même faite par Cauchy dans son premier Mémoire [1]. Ainsi la grandeur, ou la petitesse des résidus, n'est pas un sûr indice qu'on puisse arrêter les calculs.

---

[1] Une remarque analogue a été faite par M. Seeliger (*Astron. Nachr.*, 2295; 1880). Le résultat de l'interpolation ne s'améliore pas, au contraire, en augmentant le nombre des termes. M. Tisserand, ayant tenté d'appliquer le procédé de

Cette objection ne se trouve pas nettement écartée dans la réponse de Cauchy. Il insiste seulement sur les facilités qu'offre son procédé dans le cas où le nombre des inconnues n'est pas fixé d'avance, par exemple, lorsqu'il s'agit de déterminer non seulement les valeurs des coefficients d'une série convergente, mais encore le nombre des termes après lesquels la série pourra être arrêtée sans inconvénient. Ce nombre se détermine par la considération des résidus successifs $\Delta^m f$: on s'arrête lorsqu'ils sont devenus suffisamment petits. C'est donc, à vrai dire, un procédé de tâtonnement. Mais il est très commode, et Villarceau se loue beaucoup des résultats qu'il a obtenus en l'appliquant à la détermination des orbites, au lieu du procédé recommandé par Laplace, qui repose sur la formule générale de Newton. De même, P.-G. Bartlett (*On the empirical interpolation of observations; Am. J. of Sc.*, juillet 1862) recommande le procédé de Cauchy pour la représentation d'une série d'expériences.

Cauchy a encore proposé d'appliquer d'abord son procédé avec les facteurs ± 1, puis de *corriger* le résultat par la méthode des moindres carrés; mais c'est peut-être compliquer les choses plus que de raison. Au surplus, pour conformer le procédé tout de suite au principe des moindres carrés, il n'y a qu'à mettre pour λ, μ, ν, ... les coefficients mêmes des inconnues, comme l'ont déjà expressément remarqué Cauchy et Bienaymé. On peut consulter, à ce sujet, deux Notes de M. E. Carvallo, *sur les formules d'interpolation* et *sur l'application de la méthode des moindres carrés* (*Comptes rendus*, 30 janvier et 26 mars 1888).

Si les facteurs λ, μ, ν, ... sont déterminés de cette manière, on a la formule que M. Tchébychef a donnée en 1854, et dont il sera question plus loin, en même temps que de quelques autres travaux se rattachant aux problèmes de ce genre.

18. Les Mémoires qu'il m'a fallu lire sont très nombreux; je ne puis songer à les résumer tous, ni à reproduire toujours les notations des auteurs, qui changent d'un Mémoire à l'autre, et dont la diversité rend la lecture successive et la comparaison de ces écrits

---

Cauchy à la détermination du mouvement propre du système solaire, a dû l'abandonner pour la méthode des moindres carrés.

très pénible. J'ai été fort embarrassé pour choisir une notation convenable. Cela semble peu de chose; mais, dans ces matières, une notation bien faite peut épargner la moitié du travail; elle nous guide, nous avertit, et prévient l'hésitation; elle rend des services du même ordre que ceux des outils et des machines. C'est sans doute pour cela que les nouvelles méthodes se réduisent si souvent à des changements de notation.

La difficulté consiste ici à bien indiquer, sans un appareil rébarbatif d'exposants et d'indices, l'algorithme, en soi assez compliqué, des opérations que comporte un problème d'élimination. Il faut, en outre, approprier tour à tour les notations au cas d'un système d'équations linéaires déterminant les inconnues $x, y, z, \ldots$ et à celui d'une formule d'interpolation dont on cherche les coefficients $a, b, c, \ldots$, qui deviennent les inconnues, tandis que les valeurs particulières des variables jouent le rôle de constantes données. C'est à ce dernier cas que s'appliquait primitivement le procédé de Cauchy, et sa première formule d'interpolation s'écrit

$$y = au + bv + cw + \ldots,$$

où $a, b, c, \ldots$ sont les coefficients cherchés, tandis que $u, v, w, \ldots$ sont les fonctions de x suivant lesquelles il s'agit de développer y. Villarceau, dans son exposé de la méthode, écrit

$$y = a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \ldots,$$

en désignant pour A, B, C, ... les fonctions de x (ou d'un nombre quelconque de variables) dont les valeurs sont données par l'observation. M. Gram écrit

$$y_x = a_1\mathrm{X}_1 + a_2\mathrm{X}_2 + \ldots.$$

Mais nous aurons besoin des indices inférieurs pour distinguer les valeurs particulières correspondant aux valeurs $x_0, x_1, x_2, \ldots$ de l'argument x. Il serait, d'autre part, très difficile d'écrire certaines formules sans un signe quelconque, indiquant le rang des fonctions $u, v, w, \ldots$ dans la série. Cette difficulté devient surtout sensible lorsqu'on veut conformer la méthode de Cauchy au principe des moindres carrés. Pour avoir une notation commode et maniable, il m'a paru nécessaire de recourir aux lettres accen-

tuées, et de remplacer u, v, w, ... par

$$x^0, x', x'', \ldots, x^n \ldots.$$

Dans le cas le plus simple, celui d'un développement suivant les puissances ascendantes de x, on aura donc

$$x^0 = 1, \qquad x' = x, \qquad x'' = x^2, \qquad \ldots$$

et x^n représentera, à l'ordinaire, la puissance $n^{\text{ième}}$ de x; mais, en général, nous désignerons par x^n la fonction de x dont n est le numéro d'ordre ou le rang dans la série. On verra qu'il n'en peut résulter aucune confusion et qu'on peut se dispenser d'écrire $x^{(n)}$ au lieu de x^n, ce qui serait peut-être plus clair, mais très incommode pour la transcription des formules. Nous conserverons aussi la notation de Gauss

$$(\alpha\beta) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \ldots + \alpha_n\beta_n$$

pour représenter les sommes de produits ou sommes pondérées.

19. Ceci posé, nous allons considérer le cas spécial où le procédé de Cauchy est appliqué à la construction d'une formule d'interpolation.

En admettant que la fonction de x accessible à l'observation [1] soit développable en série convergente suivant les puissances de x ou, plus généralement, suivant certaines fonctions x^0, x', x'', ..., de sorte qu'on puisse poser

$$f = \mathrm{A}x^0 + \mathrm{B}x' + \mathrm{C}x'' + \ldots, \tag{15}$$

il s'agit de déterminer les coefficients A, B, C, ... à l'aide d'un certain nombre de valeurs données $f_1, f_2, f_3, \ldots$, qui correspondent aux valeurs x_0, x_1, x_2, ... de l'argument x. On aura donc le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned} f_1 &= \mathrm{A}x_1^0 + \mathrm{B}x_1' + \mathrm{C}x_1'' + \ldots, \\ f_2 &= \mathrm{A}x_2^0 + \mathrm{B}x_2' + \mathrm{C}x_2'' + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

---

[1] Dans beaucoup de cas, il sera plus commode de développer directement quelque fonction de f, par exemple son logarithme, comme nous l'avons déjà dit (n° 12).

où les coefficients donnés x_i^0, x_i', x_i'', ... sont ceux que nous avons désignés plus haut par a_i, b_i, c_i, ..., tandis que A, B, C, ... remplacent les inconnues x, y, z, ...

Comme le nombre des équations est, le plus souvent, supérieur à celui des inconnues, on déduit du système donné un nombre d'équations strictement suffisant en formant les sommes pondérées

$$(16) \qquad (\lambda f) = (\lambda x^0)\mathrm{A} + (\lambda x')\mathrm{B} + (\lambda x'')\mathrm{C} + \ldots$$

analogues à celles qui composent le système (5).

Mais le nombre de ces équations dépend évidemment du nombre de termes qu'on veut conserver dans la formule d'interpolation (15). Or, on sait rarement d'avance combien de termes il faudra introduire pour obtenir une représentation satisfaisante, et pour chaque terme nouveau on est obligé de répéter tous les calculs. C'est pour parer à cet inconvénient que Cauchy a imaginé sa méthode d'approximation successive, où les termes nouveaux se déterminent en gardant toujours les anciens. Pour y accommoder nos formules, nous n'avons qu'à mettre x^0, x', x'', ... à la place de a, b, c, ..., et A, B, C, ... au lieu de x, y, z, ... Les relations (14) montrent que f s'obtient sous la forme

$$(17) \qquad f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x' + \varphi'' \Delta^2 x'' + \ldots,$$

les coefficients φ et les Δ étant définis par les relations suivantes

$$(18) \quad \Delta f = f - \varphi x^0, \quad \Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x', \quad \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 x'', \quad \ldots,$$

$$(19) \qquad \varphi = \frac{(\lambda f)}{(\lambda x^0)}, \qquad \varphi' = \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta x')}, \qquad \varphi'' = \frac{(\nu \Delta^2 f)}{(\nu \Delta^2 x'')}, \qquad \ldots,$$

qui entraînent les formules d'opération générales

$$(10) \qquad \left\{ \begin{array}{llll} (\lambda \Delta) = 0, & (\lambda \Delta^2) = 0, & (\mu \Delta^2) = 0; & \\ (\lambda \Delta^3) = 0, & (\mu \Delta^3) = 0, & (\nu \Delta^3) = 0; & \ldots \end{array} \right.$$

déjà indiquées plus haut. Ajoutons que, n étant le nombre des valeurs données de f, on aura $\Delta^n f = 0$.

Les rapports φ, qui étaient dénotés plus haut par α, β, γ, ... pour $f = a$, b, c, ..., seront maintenant désignés par φ_0, φ_1,

$\varphi_2, \ldots$ pour $f = x^0, x', x'', \ldots$. On aura donc l'algorithme

$$(20)\quad \begin{cases} \varphi_0 = 1, \\ \varphi_1 = \dfrac{(\lambda x')}{(\lambda x^0)}, & \varphi'_1 = 1, \\ \varphi_2 = \dfrac{(\lambda x'')}{(\lambda x^0)}, & \varphi'_2 = \dfrac{(\mu \Delta x'')}{(\mu \Delta x')}, & \varphi''_2 = 1, \\ \varphi_3 = \dfrac{(\lambda x''')}{(\lambda x^0)}, & \varphi'_3 = \dfrac{(\mu \Delta x''')}{(\mu \Delta x')}, & \varphi''_3 = \dfrac{(\nu \Delta^2 x''')}{(\nu \Delta^2 x'')}, & \varphi'''_3 = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(21)\quad \begin{cases} \Delta x^0 = 0, \\ \Delta x' = x' - \varphi_1 x^0, & \Delta^2 x' = 0, \\ \Delta x'' = x'' - \varphi_2 x^0, & \Delta^2 x'' = \Delta x'' - \varphi'_2 \Delta x', & \Delta^3 x'' = 0, \\ \Delta x''' = x''' - \varphi_3 x^0, & \Delta^2 x''' = \Delta x''' - \varphi'_3 \Delta x', & \Delta^3 x''' = \Delta^2 x''' - \varphi''_3 \Delta^2 x'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

$$(22)\quad \begin{cases} x^0 = x^0, \\ x' = \varphi_1 x^0 + \Delta x', \\ x'' = \varphi_2 x^0 + \varphi'_2 \Delta x' + \Delta^2 x'', \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On commence par poser $f = \mathrm{A} x^0$ en première approximation, et l'on trouve

$$\mathrm{A} = \varphi, \qquad f = \varphi x^0.$$

On calcule alors les résidus Δf, à savoir

$$\Delta f_1 = f_1 - \varphi x_1^0, \qquad \Delta f_2 = f_2 - \varphi x_2^0, \qquad \ldots, \qquad \Delta f_n = f_n - \varphi x_n^0,$$

et s'il y a lieu, on procède à la seconde approximation en posant

$$f = \mathrm{A} x^0 + \mathrm{B} x'.$$

La formule (17) donne alors

$$f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x', \qquad \Delta f = \varphi' \Delta x',$$

par conséquent

$$\mathrm{B} = \varphi', \qquad \mathrm{A} = \varphi - \varphi_1 \varphi',$$

où les coefficients φ sont fournis par les formules (19) et (20), que nous pourrons écrire, avec Cauchy,

$$\varphi_1 = \frac{\mathrm{S} x'}{\mathrm{S} x^0}, \qquad \varphi = \frac{\mathrm{S} f}{\mathrm{S} x^0}, \qquad \varphi' = \frac{\mathrm{S}' \Delta f}{\mathrm{S}' \Delta x'},$$

en réduisant les facteurs λ, μ à ± 1, les signes étant pris de ma-

nière que tous les termes de Sx^0 et de $S'\Delta x'$ deviennent positifs. On dira alors, avec Villarceau, que x^0 est la dominante des sommes S, et $\Delta x'$ celle des sommes S', ces deux fonctions déterminant, l'une le facteur λ dans les sommes S, l'autre le facteur μ dans les sommes S'.

On cherche ensuite les résidus

$$\Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x'$$

et, s'ils sont encore sensibles, on essaye une troisième approximation

$$f = Ax^0 + Bx' + Cx'',$$

dans laquelle on a

$$f = \varphi x^0 + \varphi' \Delta x' + \varphi'' \Delta^2 x'', \qquad \Delta^2 f = \varphi'' \Delta^2 x''$$

et, par suite,

$$C = \varphi'', \qquad B = \varphi' - \varphi'_2 \varphi'',$$

$$A = \varphi - \varphi_1 B - \varphi_2 C = \varphi - \varphi_1(\varphi' - \varphi'_2 \varphi'') - \varphi_2 \varphi'',$$

les coefficients étant toujours donnés par les formules (19) et (20). On peut continuer ainsi, jusqu'à ce qu'on arrive à des résidus $\Delta^m f$ qui soient négligeables. Mais il est visible que le choix des facteurs λ, μ, ν, ... reste arbitraire.

Au lieu de les réduire, avec Cauchy, à ± 1, nous pouvons les égaler aux coefficients des inconnues A, B, C, ... et prendre $\lambda = x^0$, $\mu = x'$, $\nu = x''$, ..., pour nous conformer à la méthode des moindres carrés et obtenir le résultat le plus avantageux.

Il est toutefois permis de penser que l'emploi rigoureux de la méthode des moindres carrés est bien rarement nécessaire, et qu'il suffit, le plus souvent, d'en suivre le principe en arrondissant les facteurs, c'est-à-dire en remplaçant des groupes de facteurs par une valeur moyenne en nombre rond. Cauchy, en les réduisant tous à ± 1, va probablement trop loin; on sera plus près de la règle, ainsi que nous l'avons déjà dit, en égalant les facteurs à 0, ± 1, ± 2, ... selon l'importance du coefficient de l'inconnue qui joue le rôle de *dominante*.

20. Dans le cas le plus simple, celui d'un développement sui-

vant les puissances de x, nous avons

$$x^0 = 1, \qquad x' = x, \qquad x'' = x^2, \qquad \ldots,$$

$$f = A + Bx + Cx^2 + \ldots$$

et (17) devient

$$(23) \qquad f = \varphi + \varphi' \Delta x + \varphi'' \Delta^2 x^2 + \ldots.$$

Les facteurs λ se réduisent à $+1$ (dans la méthode de Cauchy, comme dans la méthode des moindres carrés); la somme S est la somme ordinaire Σ, et $(\lambda x^0) = n$ représente le nombre des observations; les quantités φ, φ_1, φ_2, ... sont des moyennes arithmétiques. On a

$$(24) \quad \left\{ \begin{array}{llll}
\varphi = \frac{1}{n} \Sigma f, & \varphi' = \frac{(\mu \Delta f)}{(\mu \Delta x)}, & \varphi'' = \frac{(\nu \Delta^2 f)}{(\nu \Delta^2 x^2)}, & \ldots, \\
\varphi_1 = \frac{1}{n} \Sigma x, & \varphi'_1 = 1, & & \\
\varphi_2 = \frac{1}{n} \Sigma x^2, & \varphi'_2 = \frac{(\mu \Delta x^2)}{(\mu \Delta x)}, & \varphi''_2 = 1, & \\
\varphi_3 = \frac{1}{n} \Sigma x^3, & \varphi'_3 = \frac{(\mu \Delta x^3)}{(\mu \Delta x)}, & \varphi''_3 = \frac{(\nu \Delta^2 x^3)}{(\nu \Delta^2 x^2)}, & \varphi'''_3 = 1, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots
\end{array} \right.$$

Ensuite

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{llll}
\Delta f = f - \varphi, & \Delta^2 f = \Delta f - \varphi' \Delta x, & \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi'' \Delta^2 x^2, & \ldots, \\
\Delta x = x - \varphi_1, & \Delta^2 x = 0, & & \\
\Delta x^2 = x^2 - \varphi_2, & \Delta^2 x^2 = \Delta x^2 - \varphi'_2 \Delta x, & \Delta^3 x^2 = 0, & \\
\Delta x^3 = x^3 - \varphi_3, & \Delta^2 x^3 = \Delta x^3 - \varphi'_3 \Delta x, & \Delta^3 x^3 = \Delta^2 x^3 - \varphi''_3 \Delta^2 x^2, & \Delta^4 x^3 = 0, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots
\end{array} \right.$$

enfin

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l}
1 = \varphi_0, \\
x = \varphi_1 + \Delta x, \\
x^2 = \varphi_2 + \varphi'_2 \Delta x + \Delta^2 x^2, \\
x^3 = \varphi_3 + \varphi'_3 \Delta x + \varphi''_3 \Delta^2 x^2 + \Delta^3 x^3, \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array} \right.$$

La forme explicite de la série devient

$$f = \varphi + \varphi'(x - \varphi_1) + \varphi''[x^2 - \varphi_2 - \varphi'_2(x - \varphi_1)] + \ldots.$$

Quant aux facteurs μ, ν, ..., on prendrait, avec Cauchy,

$$\begin{aligned}(\mu\,\Delta x) &= S'\Delta x = \Sigma \pm \Delta x,\\ (\nu\,\Delta^2 x^2) &= S''\Delta^2 x^2 = \Sigma \pm \Delta^2 x^2,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\end{aligned}$$

en choisissant les signes de manière à n'avoir ici que des termes positifs. C'est sous cette forme que Bartlett a étudié le procédé d'interpolation de Cauchy, en traitant quelques exemples numériques (*Am. J. of Sc.*, 1862).

Si nous voulions nous conformer au principe des moindres carrés, il faudrait prendre $\mu = x$, $\nu = x^2$, ...

21. De même, dans le cas général, en faisant usage de la formule

$$f = \varphi x^0 + \varphi'\Delta x' + \varphi''\Delta^2 x'' + \ldots, \tag{17}$$

on se conformerait au principe des moindres carrés en prenant $\lambda = x^0$, $\mu = x'$, $\nu = x''$, ..., et l'algorithme aurait la forme suivante :

$$\Delta f = f - \varphi x^0, \qquad \Delta^2 f = \Delta f - \varphi'\Delta x',$$

$$\Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi''\Delta^2 x'', \qquad \ldots, \qquad \Delta^n f = 0;$$

$$\varphi = \frac{(x^0 f)}{(x^0 x^0)}, \qquad \varphi' = \frac{(x'\Delta f)}{(x'\Delta x')}, \qquad \varphi'' = \frac{(x''\Delta^2 f)}{(x''\Delta^2 x'')}, \qquad \ldots.$$

On aurait, pour $f = x^r$,

$$\Delta x^r = x^r - \varphi_r x^0, \qquad \Delta^2 x^r = \Delta x^r - \varphi'_r\Delta x',$$

$$\Delta^3 x^r = \Delta^2 x^r - \varphi''_r\Delta^2 x'', \qquad \ldots, \qquad \Delta^{r+1} x^r = 0;$$

$$\varphi_r = \frac{(x^0 x^r)}{(x^0 x^0)}, \qquad \varphi'_r = \frac{(x'\Delta x^r)}{(x'\Delta x')}, \qquad \ldots, \qquad \varphi_r^{(r)} = 1, \qquad \varphi_r^{(r+1)} = 0,$$

par conséquent

$$\varphi_0 = 1,$$
$$\varphi_1 = \frac{(x^0 x')}{(x^0 x^0)}, \qquad \varphi'_1 = 1,$$
$$\varphi_2 = \frac{(x^0 x'')}{(x^0 x^0)}, \qquad \varphi'_2 = \frac{(x' \Delta x'')}{(x' \Delta x')}, \qquad \varphi''_2 = 1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots, \qquad \ldots\ldots\ldots$$

La formule

$$(27) \qquad \Delta^{s+1} f = \Delta^s f - \varphi^{(s)} \Delta^s x^s$$

donne d'ailleurs

$$\varphi^{(s)} = \frac{(x^s \Delta^s f)}{(x^s \Delta^s x^s)}$$

en définissant $\varphi^{(s)}$ par la relation $(x^s \Delta^{s+1} f) = 0$, ou $(x^{s-1} \Delta^s f) = 0$, qui entraîne $(x^{s-1} \Delta^{s+1} f) = 0$, ..., et enfin, d'une manière générale,

$$(28) \qquad (x^r . \Delta^s) = 0 \qquad \text{pour} \qquad r < s,$$

comme le demandent les formules (10), qui s'écrivent maintenant

$$(10) \qquad (x^0 \Delta) = 0, \qquad (x^0 \Delta^2) = 0, \qquad (x' \Delta^2) = 0, \qquad \ldots$$

On a même, plus généralement,

$$(29) \qquad (\Delta^m x^r . \Delta^s) = 0 \qquad \text{pour} \qquad r < s.$$

Cela résulte des égalités

$$(30) \qquad (F . \Delta^s f) = (\Delta F . \Delta^s f) = (\Delta^2 F . \Delta^s f) = \ldots = (\Delta^s F . \Delta^s f),$$

qui se déduisent successivement des formules (27) et (28); elles montrent que, dans les formules (28), on peut remplacer x^r par Δx^r, $\Delta^2 x^r$, ..., $\Delta^r x^r$ et en général par $\Delta^m x^r$, puisque cette différence s'annule pour $m > r$. On aura donc aussi

$$(31) \qquad (\Delta^r x^r . \Delta^s x^s) = 0 \qquad \text{pour} \qquad r \gtrless s.$$

Grâce à ces relations, les sommes qui figurent dans les expressions des coefficients φ peuvent s'écrire de diverses manières, par

exemple

$$(32)\quad \begin{cases} (x'\Delta f) &= (f\Delta x') &= (\Delta x'.\Delta f), \\ (x''\Delta^2 f) &= (f\Delta^2 x'') &= (\Delta^2 x''.\Delta^2 f), \\ (x'\Delta x') &= (\Delta x'.\Delta x'), \\ (x''\Delta^2 x'') &= (\Delta x''.\Delta^2 x'') &= (\Delta^2 x''.\Delta^2 x''), \end{cases}$$

et l'on voit que les dénominateurs des φ deviennent des sommes de carrés. M. Carvallo a fait une remarque analogue.

22. Considérons en particulier le cas d'un développement suivant les puissances de x. Nous avons alors $x^0 = 1$, $x' = x$, ... et $(x^0 x^0) = n$. L'algorithme, pour l'application de la méthode des moindres carrés, devient

$$(33)\quad \begin{cases} f &= \varphi + \varphi'\Delta x + \varphi''\Delta^2 x^2 + \ldots, \\ \Delta f &= \qquad \varphi'\Delta x + \varphi''\Delta^2 x^2 + \ldots, \\ \Delta^2 f &= \qquad\qquad\quad \varphi''\Delta^2 x^2 + \ldots, \end{cases}$$

puis

$$(34)\quad \begin{cases} \Delta f = f - \varphi, & \Delta^2 f = \Delta f - \varphi'\Delta x, & \Delta^3 f = \Delta^2 f - \varphi''\Delta^2 x^2, & \ldots, \\ \Delta x = x - \varphi_1, & \Delta^2 x = 0, & & \\ \Delta x^2 = x^2 - \varphi_2, & \Delta^2 x^2 = \Delta x^2 - \varphi'_2\Delta x, & \Delta^3 x^2 = 0, & \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \end{cases}$$

et

$$(35)\quad \begin{cases} \varphi = \frac{1}{n}\Sigma f, & \varphi' = \frac{(x\Delta f)}{(x\Delta x)}, & \varphi'' = \frac{(x^2\Delta^2 f)}{(x^2\Delta^2 x^2)}, & \\ \varphi_1 = \frac{1}{n}\Sigma x, & \varphi'_1 = 1, & & \\ \varphi_2 = \frac{1}{n}\Sigma x^2, & \varphi'_2 = \frac{(x\Delta x^2)}{(x\Delta x)}, & \varphi''_2 = 1, & \\ \varphi_3 = \frac{1}{n}\Sigma x^3, & \varphi'_3 = \frac{(x\Delta x^3)}{(x\Delta x)}, & \varphi''_3 = \frac{(x^2\Delta^2 x^3)}{(x^2\Delta^2 x^2)}, & \varphi'''_3 = 1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

et aussi

$$(36)\quad \begin{cases} x = \varphi_1 + \Delta x, \\ x^2 = \varphi_2 + \varphi'_2\Delta x + \Delta^2 x^2, \\ x^3 = \varphi_3 + \varphi'_3\Delta x + \varphi''_3\Delta^2 x^2 + \Delta^3 x^3, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Il est à remarquer qu'en vertu des relations (32) nous avons

$$(37)\quad \begin{cases} (x\,\Delta f) &= (f\,\Delta x) = (\Delta x.\Delta f), \\ (x\,\Delta x) &= (\Delta x.\Delta x), \\ (x\,\Delta x^2) &= (x^2.\Delta x) = (\Delta x.\Delta x^2), \\ (x^2\Delta^2 f) &= (f.\Delta^2 x^2) = (\Delta^2 x^2.\Delta^2 f), \\ (x^2\Delta^2 x^2) &= (\Delta^2 x^2.\Delta^2 x^2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{cases}$$

ce qui permet de transformer les coefficients $\varphi^{(s)}$ de bien des manières.

Si nous voulions les exprimer par les sommes de puissances $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots$, il suffirait d'appliquer aux relations (36) les formules (28), qui peuvent s'écrire

$$(38)\quad \Sigma\,\Delta = 0, \qquad \Sigma\,\Delta^2 = 0, \qquad \Sigma\,x\,\Delta^2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \Sigma\,x^r\,\Delta^{r+i} = 0.$$

On trouverait, par exemple,

$$\begin{aligned} &n(\varphi_2 - \varphi_1\varphi_1) = (x\,\Delta x), && n(\varphi_3 - \varphi_2\varphi_1) = (x^2\,\Delta x), \\ &n(\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2) = (x\,\Delta x)\varphi'_2, && n(\varphi_4 - \varphi_2\varphi_2) = (x^2\,\Delta x)\varphi'_2 + (x^2\Delta^2 x^2), \\ &n(\varphi_4 - \varphi_1\varphi_3) = (x\,\Delta x)\varphi'_3, && n(\varphi_5 - \varphi_2\varphi_3) = (x^2\,\Delta x)\varphi'_3 + (x^2\Delta^2 x^2)\varphi''_3, \end{aligned}$$

et ainsi de suite.

23. On pourrait aussi exprimer les coefficients de la formule (33) par les puissances de Δx. Posons

$$\Delta x = z, \qquad x = z + \varphi_1,$$

nous aurons, en vertu de (28),

$$(39)\qquad \Sigma z = 0, \qquad (z^{s-i}\,\Delta^s) = 0, \qquad (z^s\,\Delta^s) = (x^s\,\Delta^s),$$

et ces formules permettent de déterminer les coefficients α_s, β_s, γ_s, ... de l'expression

$$(40)\qquad \Delta^s x^s = z^s + \alpha_s z^{s-1} + \beta_s z^{s-2} + \gamma_s z^{s-3} + \ldots$$

en fonctions des sommes Σz^m, par une série de relations de la forme

$$(41)\quad \begin{cases} 0 = \Sigma\,z^s + \alpha_s\,\Sigma\,z^{s-1} + \beta_s\,\Sigma\,z^{s-2} + \gamma_s\,\Sigma\,z^{s-3} + \ldots, \\ 0 = \Sigma\,z^{s+1} + \alpha_s\,\Sigma\,z^s + \beta_s\,\Sigma\,z^{s-1} + \gamma_s\,\Sigma\,z^{s-2} + \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Elles donnent encore

$$(x^s \Delta^s x^s) = (z^s \Delta^s x^s) = \Sigma z^{2s} + \alpha_s \Sigma z^{2s-1} + \beta_s \Sigma z^{2s-2} + \ldots$$

et

$$0 = (z^{s+1} \Delta^s x^s) + \alpha_{s+1} (z^s \Delta^s x^s).$$

Or la différence $z = x - \frac{1}{n} \Sigma x$ ne change pas, si nous remplaçons x par $x + a$, et Δf ne change pas non plus, si l'on met $f + b$ à la place de f. Il s'ensuit [comme le montrent les relations (34) et (37)] qu'il est permis, dans la formule (33), d'ajouter une constante quelconque à x aussi bien qu'à f; on peut aussi remarquer qu'elle est homogène (de dimension zéro) par rapport à x, de sorte que l'unité de x reste arbitraire.

Quand les valeurs données f_1, f_2, ... correspondent à des intervalles égaux de l'argument x ou seulement à des valeurs de x distribuées symétriquement autour de la valeur moyenne, on aura $z_1 = -z_n$, et en général $z_i = -z_{n+1-i}$; par suite

$$(42) \qquad \Sigma z = 0, \qquad \Sigma z^3 = 0, \qquad \Sigma z^5 = 0, \qquad \ldots$$

et les équations de la forme

$$0 = \alpha_s \Sigma z^{2m} + \gamma_s \Sigma z^{2m-2} + \varepsilon_s \Sigma z^{2m-4} + \ldots$$

qui résultent de (41) donnent alors

$$\alpha_s = 0, \qquad \gamma_s = 0, \qquad \varepsilon_s = 0, \qquad \ldots,$$

de sorte qu'on trouve

$$(43) \qquad \Delta^s x^s = z^s + \beta_s z^{s-2} + \delta_s z^{s-4} + \ldots.$$

Comme l'unité de x reste arbitraire et que les formules ne renferment que des différences, nous sommes libres de supposer que x_1, x_2, ... représentent les nombres 1, 2, 3, ..., n, de sorte que

$$(44) \qquad \varphi_1 = \frac{n+1}{2}, \qquad z = x - \frac{n+1}{2}, \qquad z_i = i - \frac{n+1}{2}$$

et

$$z_i = \pm \frac{n-1}{2}, \qquad \pm \frac{n-3}{2}, \qquad \ldots.$$

On a aussi, d'une part,

$$x^s = (\varphi_1 + z)^s = \varphi_1^s + \ldots + s\varphi_1 z^{s-1} + z^s,$$

et de l'autre, par les formules (36)

$$x^s = \varphi_s + \varphi'_s z + \ldots + \varphi_s^{(s-1)} \Delta^{s-1} x^{s-1} + \Delta^s x^s,$$

et, en tenant compte de (43), la comparaison donne

$$(45) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_s^{(s-1)} = s\varphi_1 = s\,\dfrac{n+1}{2}, \\ \varphi_s^{(s-2)} = \dfrac{s(s-1)}{1.2}\,\varphi_1^2 - \beta_s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

24. La formule (33), à laquelle conduit l'algorithme de Cauchy, accommodé au principe des moindres carrés, ne diffère que par les notations de celle que M. Tchébychef a donnée en 1854 et dont on trouve la démonstration dans son Mémoire de 1855 *sur les fractions continues*, traduit en français par M. J. Bienaymé, en 1858 (*Journal de Liouville*, 2e série, t. III). Cette formule peut s'écrire

$$f = \psi_0(x)\,\frac{\sum \theta^2.\psi_0 f}{\sum \theta^2.\psi_0^2} + \psi_1(x)\,\frac{\sum \theta^2.\psi_1 f}{\sum \theta^2.\psi_1^2} + \ldots,$$

où les fonctions ψ_s sont celles que nous avons désignées par $\Delta^s x^s$, tandis que θ^2 représente le poids des observations, que nous avons pris égal à l'unité.

M. Eug. Rouché a étudié les séries de ce genre dans un *Mémoire sur le développement des fonctions* (*Journ. de l'École Polytechnique*, 1858). M. Hermite, dans une Note très intéressante *sur l'Interpolation* (*Comptes rendus*, 10 janvier 1859), rattache les résultats de M. Tchébychef d'une manière directe à la formule de Lagrange, généralisée par l'introduction des polynômes $\theta(x)$. M. Borchardt s'en est occupé, à son tour, en 1860. M. Tchébychef lui-même y est revenu à plusieurs reprises : d'abord dans le Mémoire *sur l'Interpolation par la méthode des moindres carrés* (*Mém. de l'Ac. de Saint-Pétersbourg*, 1859), ensuite dans deux Mémoires *sur l'Interpolation*, publiés en 1864 et en 1875 (en russe, dans les *Bulletins* de l'Académie), modifiant chaque fois les notations et le mode d'exposition. Il a aussi traité le cas où la fonction f est en partie connue, de sorte qu'il s'agit de la repré-

senter par la série

$$f = F(A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n),$$

où le facteur F est donné (*Mémoires couronnés de l'Acad. roy. de Belgique,* t. XXI, 1870, et *Traité de Balistique extérieure* de Mayevski, 1872).

M. Jouffret a cherché à établir ces formules d'une manière plus élémentaire (*Revue d'Artillerie,* 1873-74), et M. Schols en a donné une démonstration directe, en partant des équations de condition ordinaires, fournies par le principe des moindres carrés (*Verslagen en Mededeel. der Akad. te Amsterdam,* t. IX, 1876; *Archives néerlandaises,* t. XII, 1877).

M Bienaymé, dans une Note qui précède sa traduction, signale le lien étroit qui existe entre les fonctions ψ de M. Tchébychef et les Δ de Cauchy, ou les coefficients analogues de Gauss. Lorsque, au lieu de donner un certain nombre de valeurs de la fonction f, on la regarde comme continue, les fonctions ψ deviennent aussi continues : elles satisfont alors à des équations aux différences partielles du second ordre, et les sommes, dans les formules, sont remplacées par des intégrales. On retrouve ainsi les fonctions V que Sturm et Liouville ont étudiées dans une série de Mémoires (*Journal de Mathématiques,* t. I et II). Toutes ces fonctions satisfont aux conditions du principe des moindres carrés, et fournissent autant de procédés d'interpolation, jouissant d'un minimum d'erreurs.

C'est ce que G. Plarr avait déjà montré pour les polynômes de Legendre et pour la série trigonométrique de Fourier (*Comptes rendus,* 11 mai 1857). La question a été reprise, quelques années plus tard, par E. Heine (*Monatsberichte,* 1866, *Handbuch der Kugelf.,* t. I, p. 292) et par Töpler (*Bull. de l'Acad. de Vienne,* 1876). Enfin, M. J.-P. Gram en a fait le sujet d'une thèse *Sur les développements en série, obtenus par la méthode des moindres carrés* (*Om Rækkeudviklinger, bestemte ved hjælp af de mindste kvadraters methode.* Copenhague, 1879, in-8°, 122 p.) et d'un Mémoire publié ensuite dans le *Journal de Crelle* (t. XCIV, 1883), où les « séries à interpolation » sont étudiées sous un point de vue très général.

25. La formule de M. Tchébychef, destinée à représenter des observations de même poids, lorsque f est développable en série suivant les puissances de x, peut s'écrire comme il suit :

$$(46)\qquad f = \psi_0(x)\frac{\sum f_i.\psi_0(x_i)}{\sum \psi_0^2(x_i)} + \psi_1(x)\frac{\sum f_i.\psi_1(x_i)}{\sum \psi_1^2(x_i)} + \ldots.$$

Les fonctions $\psi_s(x)$ sont les dénominateurs des réduites qui se rencontrent dans le développement en fraction continue de la somme

$$(47)\qquad \frac{1}{x-x_1} + \frac{1}{x-x_2} + \ldots + \frac{1}{x-x_n}.$$

On a d'ailleurs $\psi_0 = 1$, et l'on s'assure facilement que la fonction $\psi_s(x)$ de M. Tchébychef n'est autre chose que la différence $\Delta^s x$ de Cauchy. En vertu de (31), on a donc

$$(48)\qquad \sum \psi_r.\psi_s = 0.$$

La formule (46) revient à celle-ci

$$f = \frac{1}{n}\sum f + \frac{(f\Delta x)}{(\Delta x\Delta x)}\Delta x + \frac{(f\Delta^2 x^2)}{(\Delta^2 x^2.\Delta^2 x^2)}\Delta^2 x^2 + \ldots,$$

qui coïncide avec notre série (33). Mais M. Tchébychef y arrive par une autre voie, et fait usage d'algorithmes ingénieux pour le calcul des coefficients. Dans le Mémoire de 1859, les sommes $(f.\Delta^s x^s)$ sont ramenées à la forme équivalente $(x^s.\Delta^s f)$ et les calculs reposent sur des séries récurrentes; on les applique à un exemple numérique.

26. Un cas particulier très intéressant est celui où les valeurs données f_i correspondent à des intervalles égaux de l'argument x. Comme nous l'avons déjà dit, il est alors permis d'identifier x_1, x_2, x_3, ..., x_n avec les nombres 1, 2, 3, ..., n, de sorte que la série (47) devient

$$(49)\qquad \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2} + \ldots + \frac{1}{x-n}.$$

En désignant par D^s les différences finies ordinaires, M. Tchébychef montre qu'on aura

$$(50) \qquad \psi_s(x) = D^s \Phi_s,$$

où

$$(51) \qquad \Phi_s = (x-1)(x-2)\ldots(x-s)(x-n-1)\ldots(x-n-s),$$

à un facteur constant près, qui reste évidemment arbitraire.

La fonction ψ_s, ainsi définie, joue dans le calcul inverse des différences un rôle analogue à celui des polynômes de Legendre dans le Calcul intégral.

La formule (46) se transforme comme il suit :

$$(52) \quad \left\{ \begin{aligned} f = {} & \frac{1}{n}\sum_1^n f_i + \frac{3}{n(n^2-1)}\psi_1(x)\sum_1^n \frac{i}{1}\,\frac{n-i}{1}\,Df_i \\ & + \frac{5}{n(n^2-1)(n^2-4)}\psi_2(x)\sum_1^n \frac{i(i+1)(n-i)(n-i-1)}{1.2.1.2}\,D^2 f_i + \ldots. \end{aligned} \right.$$

Dans le Mémoire de 1859, M. Tchébychef remplace x par $z = \Delta x$; on a

$$x = z + \frac{n+1}{2},$$

par conséquent

$$(53) \quad \Phi_s = \left(z + \frac{n-1}{2}\right)\left(z + \frac{n-3}{2}\right)\ldots\left(z + \frac{n-2s+1}{2}\right)\left(z - \frac{n+1}{2}\right)\ldots\left(z - \frac{n+2s-1}{2}\right.$$

ou bien

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \left(z^2 - z - \frac{n^2-1}{4}\right)\left(z^2 - 3z - \frac{n^2-9}{4}\right)\ldots \\ &= \left[z(z-1) - \frac{n^2-1}{4}\right]\left[(z-1)(z-2) - \frac{n^2-1}{4}\right]\ldots\left[(z-s)(z-s+1) - \frac{n^2-1}{4}\right. \end{aligned}$$

Comme on a d'ailleurs $Dx = Dz$, on pourra prendre les différences par rapport à z. En faisant, avec M. Tchébychef, $\psi_s = D^s\Phi_s$, le terme le plus élevé de ψ_s devient

$$D^s z^{2s} = \frac{(2s)!}{s!}\,z^s + \ldots.$$

Pour réduire le coefficient de z^s à l'unité, nous poserons plutôt

$$(54) \qquad \psi_s = \frac{s!}{(2s)!} D^s \Phi_s = C.D^s \Phi_s.$$

On trouve alors $\psi_s = \Delta^s x^s$, et

$$\psi_0 = 1, \quad \psi_1 = z, \quad \psi_2 = z^2 - \frac{n^2-1}{12}, \quad \psi_3 = z^3 - \frac{3n^2-7}{20} z, \quad \ldots,$$

ou bien

$$\psi_1 = x - \frac{n+1}{2}, \quad \psi_2 = x^2 - (n+1)x + \frac{(n+1)(n+2)}{2.3}, \quad \ldots.$$

Quant à la démonstration de ces formules, elle est facile à l'aide de certains théorèmes du calcul aux différences finies. En faisant $\mathrm{S} = \mathrm{D}^{-1}$ on a, comme on sait [1],

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_n = \sum_1^n f_i = \mathop{\mathrm{S}}_1^{n+1} f_i,$$

puis, pour deux fonctions f, F,

$$\mathrm{S}\, \mathrm{F}_x . \mathrm{D} f_x = \mathrm{F}_x . f_x - \mathrm{S}\, \mathrm{F}_{x+1} . \mathrm{D} f_x,$$

et par suite

$$(55) \quad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{S}\, \mathrm{F}_x . \mathrm{D}^s f_x = \mathrm{F}_x . \mathrm{D}^{s-1} f_x - \mathrm{D}\mathrm{F}_x . \mathrm{D}^{s-2} f_{x+1} \\ &\quad + \mathrm{D}^2 \mathrm{F}_x . \mathrm{D}^{s-3} f_{x+2} - \ldots \pm \mathrm{D}^{s-1} \mathrm{F}_x . f_{x+s-1} \mp \mathrm{S} f_{x+s} . \mathrm{D}^s \mathrm{F}_x. \end{aligned} \right.$$

Toutes les différences $\mathrm{D}f$ qui se rencontrent hors du signe S se déduisent de la série de valeurs $f_x, f_{x+1}, \ldots, f_{x+s-1}$, correspondant aux arguments x, $x+1, \ldots, x+s-1$, qui, pour les deux limites $x = 1$ et $x = n+1$, deviennent respectivement $1, 2, \ldots, s$, et $n+1, n+2, \ldots, n+s$. Or, en vertu de (51), Φ_s s'annule pour

---

[1] Dans les formules de M. Tchébychef, $\sum_0^m$ signifie aussi somme jusqu'à m *exclusivement*.

ces arguments. Il s'ensuit qu'en faisant $f = \Phi_s$, les termes hors du signe $\mathfrak{S}$ s'évanouissent aux limites et qu'on aura, d'une manière générale,

$$\mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{n+1} \mathrm{F}.\mathrm{D}^s\Phi_s(x) = \mp \mathop{\mathfrak{S}}_{1}^{n+1} \Phi_s(x+s)\mathrm{D}^s\mathrm{F},$$

ou bien

$$(56) \qquad \sum_1^n \mathrm{F}.\mathrm{D}^s\Phi_s(x) = (-1)^s \sum_1^n \Phi_s(x+s)\mathrm{D}^s\mathrm{F},$$

Φ_s étant défini par la formule (51). Lorsque F représente une fonction rationnelle d'un degré r, inférieur à s, on a $\mathrm{D}^s\mathrm{F} = 0$, et il vient

$$(57) \qquad \sum_1^n \mathrm{F}.\mathrm{D}^s\Phi_s = 0.$$

Dès lors, en posant $\mathrm{F} = \mathrm{D}^r\Phi_r$, $r < s$, nous aurons

$$(58) \qquad \sum \mathrm{D}^r\Phi_r.\mathrm{D}^s\Phi_s = 0,$$

et cette relation a lieu, évidemment, pour $r \lessgtr s$. C'est précisément la relation (31), ou (48), qui suffit à déterminer les fonctions ψ_s à un facteur numérique près. On en conclut que

$$(54) \qquad \psi_s(x) = \mathrm{C}.\mathrm{D}^s\Phi_s.$$

Pour transformer les numérateurs $(f.\psi_s)$, nous avons, en vertu de (56), en écrivant i pour x,

$$(59) \qquad \frac{1}{\mathrm{C}} \sum f.\psi_s = \sum_1^n f_i.\mathrm{D}^s\Phi_s(i) = (-1)^s \sum_1^n \Phi_s(i+s)\mathrm{D}^s f_i,$$

où

$$(60) \quad \Phi_s(i+s) = i(i+1)\ldots(i+s-1)(i-n)\ldots(i-n+s-1).$$

On a

$$\Phi_0 = 1, \qquad \Phi_1(i+1) = i(i-n), \qquad \Phi_2(i+1) = i(i+1)(i-n)(i-n+1).$$

Il reste à transformer les dénominateurs $\sum \psi_s^2$. En faisant, dans la formule (59), $f = \psi_s$, on trouve

$$(61) \qquad \frac{1}{C}\sum \psi_s^2 = (-1)^s \sum_1^n \Phi_s(i+s)\, D^s \psi_s(i).$$

Or, le terme le plus élevé de ψ_s étant x^s, on a $D^s\psi_s = s!$, et en remarquant encore que $\Phi_s(i+s)$ s'annule depuis $i = n - s + 1$ jusqu'à $i = n$, l'équation (61) se réduit à celle-ci

$$(62) \qquad \frac{1}{C}\sum \psi_s^2 = (-1)^s s! \sum_1^{n-s} \Phi_s(i+s).$$

On a d'ailleurs, en faisant toujours $C = \frac{s!}{(2s)!}$,

$$(63) \qquad C.D^s(i-s)\ldots(i+s-1) = i(i+1)\ldots(i+s-1);$$

en nous servant de cette relation pour transformer Φ_s, et introduisant $\mathcal{S}$ à la place de $\sum$, (62) peut s'écrire

$$(64) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C^2}\sum \psi_s^2 = (-1)^s s! \mathop{\mathcal{S}}_1^{n-s+1} & (i-n)\ldots(i-n+s-1) \\ & \times D^s(i-s)\ldots(i+s-1). \end{aligned} \right.$$

Si nous appliquons la formule générale (55) à l'expression qui précède, il vient

$$(65) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{C^2}\sum \psi_s^2 = s! \mathop{\mathcal{S}}_1^{n-s+1} & i(i+1)\ldots(i+2s-1) \\ & \times D^s(i-n)\ldots(i-n+s-1), \end{aligned} \right.$$

car les termes hors du signe disparaissent aux deux limites [ceux qui dépendent du premier produit $(i-n)$ ... à la limite supérieure, à cause du facteur $i-n+s-1$, et ceux qui dépendent du second $(i-s)$ ... à la limite inférieure, à cause du facteur $i-1$]. Or

$$D^s(i-n)\ldots(i-n+s-1) = D^s i^s = s!$$

et

$$i(i+1)\ldots(i+2s-1)=\frac{1}{2s+1}\,\mathrm{D}(i-1)i\ldots(i+2s-1).$$

En substituant, intégrant et mettant les limites, on trouve

$$(66)\qquad \left\{\begin{aligned}\frac{1}{\mathrm{C}^2}\sum\psi_s^2&=\frac{s!\,s!}{2s+1}\,n(n^2-1)(n^2-4)\ldots(n^2-s^2)\\&=\frac{s!\,s!(n+s)!}{(2s+1)(n-s-1)!}.\end{aligned}\right.$$

On pourrait établir cette formule à l'aide de l'expression générale

$$\mathrm{S}\Phi_s(i+s)=\frac{i-1}{2s+1}\,\Phi_s(i+s)\left[1+\frac{s(n+s)}{2s(n-i)}+\ldots\right],$$

mais la démonstration qui précède peut suffire. En substituant (59) et (66) dans la formule (46), on obtient la série (52) de M. Tchébychef, qui devient

$$67)\left\{\begin{aligned}f=\frac{1}{n}\sum f_i+\frac{2.3}{n(n^2-1)}\,\psi_1(x)\sum\frac{i}{1}\,\frac{n-i}{1}\,\mathrm{D}f_i+\ldots\\+\frac{(2s+1)!\,\psi_s(x)}{s!\,n(n^2-1)\ldots(n^2-s^2)}\sum\frac{i}{1}\ldots\frac{i+s-1}{s}\,\frac{n-i}{1}\ldots\frac{n-i-s+1}{s}\,\mathrm{D}^s f_i+.\end{aligned}\right.$$

à cause du facteur C, introduit par la formule (54).

27. Il faut enfin chercher une expression de ψ_s, appropriée an calcul numérique. Nous avions

$$(51)\qquad \Phi_s(x)=(x-1)\ldots(x-s)(x-n-1)\ldots(x-n-s),$$

$$(54)\qquad \psi_s=\mathrm{C}.\mathrm{D}^s\Phi_s=\frac{s!}{(2s)!}\,\mathrm{D}^s\Phi_s.$$

En posant

$$(68)\qquad \mathrm{F}_s(x)=(x-1)(x-2)\ldots(x-s),$$

on aurait

$$\mathrm{F}_s(s+1-x)=(-1)^s\mathrm{F}_s(x),$$

puis aussi

$$(69)\quad \begin{cases} F_s(x+1) = \dfrac{x}{x-s} F_s(x) = x F_{s-1}(x), \\ DF_s(x) = \dfrac{s}{x-s} F_s(x), \\ D^2 F_s(x) = \dfrac{s(s-1)}{(x-s)(x-s+1)} F_s(x), \qquad \ldots, \end{cases}$$

ou bien

$$DF_s(x) = s F_{s-1}(x), \qquad \ldots,$$

$$D^m F_s(x) = s(s-1)\ldots(s-m+1) F_{s-m}(x) = \frac{s!}{(s-m)!} F_{s-m}(x),$$

$$D^m F_{m+i}(x) = (i+1)\ldots(i+m) F_i(x) = \frac{(i+m)!}{i!} F_i(x).$$

Ensuite

$$(x-n-1)\ldots(x-n-s) = F(x-n) = (-1)^s F(n+s+1-x)$$

et, par conséquent,

$$(70)\qquad \Phi_s(x) = F_s(x).F_s(x-n).$$

On peut maintenant développer $F(x-n)$ par la formule des différences

$$F(x-n) = F(s+1-n) + \frac{x-s-1}{1} DF(s+1-n) + \ldots;$$

d'où, par les relations (69),

$$\frac{F(x-n)}{F(s+1-n)} = 1 + \frac{s}{1}\,\frac{x-s-1}{1-n} + \frac{s(s-1)}{1.2}\,\frac{x-s-1}{1-n}\,\frac{x-s-2}{2-n} + \ldots$$

ou bien

$$(71)\quad \begin{cases} (-1)^s \dfrac{F(x-n)}{F(n)} = 1 - \dfrac{s}{1}\,\dfrac{x-s-1}{n-1} \\ \qquad\qquad + \dfrac{s(s-1)}{1.2}\,\dfrac{x-s-1}{n-1}\,\dfrac{x-s-2}{n-2} - \ldots \end{cases}$$

et, à cause de (70),

$$(72)\quad \begin{cases} (-1)^s \dfrac{\Phi_s(x)}{F_s(n)} = F_s(x) - \dfrac{s}{n-1} F_{s+1}(x) \\ \qquad\qquad + \dfrac{1}{1.2}\,\dfrac{s(s-1)}{(n-1)(n-2)} F_{s+2}(x) - \ldots \end{cases}$$

Il s'ensuit que

$$(-1)^s \frac{D^s \Phi_s(x)}{F_s(n)} = D^s F_s(x) - \frac{s}{n-1} D^s F_{s+1}(x) + \ldots.$$

Or nous avons

$$D^s F_s = s!, \qquad D^s F_{s+1} = (s+1)!(x-1),$$

$$D^s F_{s+2} = \frac{(s+2)!}{1.2}(x-1)(x-2), \qquad \ldots$$

et

$$(-1)^s s! F_s(n) = \Phi_s(s+1);$$

par conséquent

$$(73) \left\{ \begin{aligned} D^s \Phi_s(x) = \Phi_s(s+1)\Big[1 - \frac{s(s+1)}{1.1}\frac{x-1}{n-1} \\ + \frac{(s-1)s(s+1)(s+2)}{1.2.1.2}\frac{x-1}{n-1}\frac{x-2}{n-2} - \ldots\Big], \end{aligned} \right.$$

ou bien

$$(74) \quad \psi_s(x) = \frac{s!\,s!}{(2s)!}\sum^{s}\frac{(-1)^{\lambda+s}}{\lambda!\,\lambda!}\frac{(s+\lambda)!}{(s-\lambda)!}\frac{(x-1)!}{(x-\lambda-1)!}\frac{(n-\lambda-1)!}{(n-s-1)!},$$

de sorte qu'on peut écrire

$$\begin{aligned} \psi_s(x) &= (-1)^s \frac{s!\,s!}{(2s)!}(n-1)\ldots(n-s) \\ &\quad \times \Big[1 - \frac{s(s+1)}{1}\frac{x-1}{n-1} + \frac{(s-1)\ldots(s+2)}{1.2.1.2}\frac{x-1}{n-1}\frac{x-2}{n-2} - \ldots\Big] \\ &= (-1)^s \frac{s!\,s!}{(2s)!} F_s(n)\Big[1 - \frac{s(s+1)}{n-1} F_1(x) \\ &\qquad + \frac{(s-1)\ldots(s+2)}{1.2.1.2(n-1)(n-2)} F_2(x) + \ldots\Big], \end{aligned}$$

ou bien, à rebours,

$$(75) \left\{ \begin{aligned} \psi_s(x) = F_s(x) - s^2 \frac{n-s}{2s} F_{s-1}(x) \\ + \frac{s^2(s-1)^2}{1.2}\frac{n-s}{2s}\frac{n-s+1}{2s-1} F_{s-2}(x) - \ldots. \end{aligned} \right.$$

On a donc $\psi_n(x) = F_n(x)$, et $\psi_n(x_i) = 0$ pour $i = 1, 2, \ldots n$.

28. En posant

$$\psi_s(x) = A_0 + A_1 F_1 + A_2 F_2 + A_3 F_3 + \ldots$$

on a, quelle que soit la fonction ψ_s,

$$D\psi_s(x) = A_1 + 2A_2F_1 + 3A_3F_2 + \ldots,$$
$$D^2\psi_s(x) = 1.2A_2 + 2.3A_3F_1 + 3.4A_4F_2 + \ldots,$$

puis

$$\psi_s(x+1) = \psi_s(x) + D\psi_s(x) = B_0 + B_1F_1 + B_2F_2 + \ldots,$$
$$D\psi_s(x+1) = D\psi_s(x) + D^2\psi_s(x) = B_1 + 2B_2F_1 + 3B_3F_2 + \ldots,$$
$$\psi_s(x+2) = \psi_s(x) + 2D\psi_s(x) + D^2\psi_s(x) = C_0 + C_1F_1 + C_2F_2 + \ldots,$$

où

$$B_0 = A_0 + A_1, \quad B_1 = A_1 + 2A_2, \quad \ldots, \quad B_\lambda = A_\lambda + (\lambda+1)A_{\lambda+1},$$
$$C_0 = B_0 + B_1, \quad C_1 = B_1 + 2B_2, \quad \ldots, \quad C_\lambda = B_\lambda + (\lambda+1)B_{\lambda+1}.$$

On a aussi, comme il est facile de le vérifier,

$$(76) \quad \left\{ \begin{aligned} (x-1)\psi_s(x) &= B_0F_1 + B_1F_2 + B_2F_3 + \ldots, \\ (x-2)(x-1)\psi_s(x) &= C_0F_2 + C_1F_3 + C_2F_4 + \ldots \end{aligned} \right.$$

et, par analogie,

$$(x-1)D\psi_s(x) = B_1F_1 + 2B_2F_2 + 3B_3F_3 + \ldots,$$
$$(x-1)D^2\psi_s(x) = 1.2B_2F_1 + 2.3B_3F_2 + \ldots,$$
$$(x-1)(x-2)D^2\psi_s(x) = 1.2C_2F_2 + 2.3C_3F_3 + \ldots.$$

Ces relations permettent de constater, en premier lieu, que $\psi_s(x)$ satisfait à l'équation aux différences finies (analogue à l'équation différentielle des fonctions sphériques)

$$(77) \quad \left\{ \begin{aligned} &(x+1)(x+1-n)D^2\psi_s(x) \\ &\quad + [2x+1-n-s(s+1)]D\psi_s(x) - s(s+1)\psi_s(x) = 0, \end{aligned} \right.$$

qui peut aussi s'écrire

$$\left[(z+1)(z+2) - \frac{n^2-1}{4}\right]D^2\psi + 2(z+1)D\psi = s(s+1)(\psi + D\psi)$$
$$= s(s+1)\psi(z+1).$$

Cela résulte de la relation

$$\lambda(\lambda+1)C_\lambda - (n-1)(\lambda+1)(\lambda+2)A_{\lambda+2}$$
$$+ (3-n)(\lambda+1)^2B_{\lambda+1} - s(s+1)B_\lambda = 0,$$

qui se déduit des suivantes

$$(\lambda+1)^2A_{\lambda+1} = -\frac{(s-\lambda)(s+\lambda+1)}{n-\lambda-1}A_\lambda,$$
$$(\lambda+1)B_\lambda = \frac{(\lambda+1)(n-1) - s(s+1)}{n-\lambda-1}A_\lambda.$$

29. On s'assure aussi facilement, en réunissant les termes de même rang, que $(x-1)\psi_s(x)$ est égal à la somme

$$\frac{n-1}{2}\psi_s+\psi_{s+1}+\frac{s^2}{4}\frac{n^2-s^2}{4s^2-1}\psi_{s-1}.$$

Il en résulte l'identité

$$(78)\qquad \psi_{s+1}+\left(\frac{n+1}{2}-x\right)\psi_s+\frac{s^2}{4}\frac{n^2-s^2}{4s^2-1}\psi_{s-1}=0,$$

qui peut s'écrire

$$(79)\qquad \psi_{s+1}=z.\psi_s-\frac{s^2}{4}\frac{n^2-s^2}{4s^2-1}\psi_{s-1},$$

en faisant toujours $z=x-\frac{n+1}{2}$. Elle permet de déduire ψ_{s+1} de ψ_s et ψ_{s-1}. On a d'ailleurs

$$\psi_0=1,\qquad \psi_1=z.$$

En posant $2z=z_1$, $2^s.\psi_s=z_s$, pour éviter l'introduction des facteurs 2^m dans les dénominateurs, l'équation (79) devient

$$z_{s+1}=z_1.z_s-s^2\frac{n^2-s^2}{4s^2-1}z_{s-1},$$

et nous avons l'algorithme

$$z_2=z_1z_1-\frac{1(n^2-1)}{1.3},$$
$$z_3=z_1z_2-\frac{4(n^2-4)}{3.5}z_1,$$
$$z_4=z_1z_3-\frac{9(n^2-9)}{5.7}z^2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

On trouve ainsi

$$\psi_2=z^2-\frac{n^2-1}{12},$$
$$\psi_3=z^3-\frac{3n^2-7}{20}z,$$
$$\psi_4=z^4-\frac{3n^2-13}{14}z^2+\frac{3(n^2-1)(n^2-9)}{560},$$
$$\psi_5=z^5-5\frac{n^2-7}{18}z^3+\frac{15n^4-230n^2+407}{1008}z,$$
$$\psi_6=z^6-5\frac{3n^2-31}{44}z^4+\frac{5n^4-110n^2+329}{176}z^2-5\frac{(n^2-1)(n^2-9)(n^2-25)}{14784},$$
$$\psi_7=z^7-7\frac{3n^2-43}{52}z^5+7\frac{15n^4-450n^2+2051}{2288}z^3-\frac{35n^6-1645n^4+17297n^2-2720}{27456}$$

La forme générale de $\psi_s(z)$ est assez compliquée, en voici les premiers termes

$$\psi_s = z^s - \frac{s(s-1)}{2^3(2s-1)}\left[n^2 - \frac{s(s-1)+1}{3}\right]z^{s-2}$$
$$+ \frac{s(s-1)(s-2)(s-3)}{1.2.2^6(2s-1)(2s-3)}\left[n^4 - 2\,\frac{s(s-1)+3}{3}\,n^2\right.$$
$$\left. + \frac{5s^4 - 22s^3 + 37s^2 - 20s + 21}{45}\right]z^{s-4} + \ldots$$

30. Le terme général de la formule (67) peut s'écrire

$$(80) \qquad (-1)^s \psi_s(x)\,\frac{(2s+1)!(n-s-1)!}{s!s!s!(n+s)!}\sum_{x=1}^{x=n}\Phi_s(x+s)\,\mathrm{D}^s f(x).$$

En faisant

$$(-1)^s\Phi_s(x+s) = x(x+1)\ldots(x+s-1)(n-x-s+1)\ldots(n-x)$$
$$= \frac{(s+x-1)!}{(x-1)!}\,\frac{(n-x)!}{(n-x-s)!},$$

il devient

$$(81) \quad \psi_s(x)\,\frac{(2s+1)!(n-s-1)!}{s!(n+s)!}\sum_{1}^{n}\frac{(s+x-1)!}{s!(x-1)!}\,\frac{(n-x)!}{s!(n-x-s)!}\,\mathrm{D}^s f(x),$$

où les deux facteurs de $\mathrm{D}^s f$ sont des coefficients du développement de $(a+b)^{s+x-1}$ et de $(a+b)^{n-x}$.

En arrêtant la série (52) ou (67) au terme qui répond à $s = l - 1$, on trouve pour $f(x)$ une valeur approchée $f^{(l)}(x)$, qui, pour $x = 1$, sera $f^{(l)}(1)$. Pour la calculer, il faut faire $x = 1$ dans $\psi_s(x)$. La formule (74), qui se réduit alors à son premier terme, donne

$$(82) \qquad \psi_s(1) = \mathrm{C}.\Phi_s(s+1) = (-1)^s\,\frac{s!s!}{(2s)!}\,\frac{(n-1)!}{(n-s-1)!},$$

et le terme général de $f(1)$, que nous désignerons par $\mathcal{F}_s$, devient

$$(83) \quad \mathcal{F}_s = (-1)^s\,\frac{2s+1}{n}\,\frac{s!n!}{(n+s)!}\sum_{1}^{n}\frac{(s+x-1)!}{s!(x-1)!}\,\frac{(n-x)!}{s!(n-x-s)!}\,\mathrm{D}^s f(x),$$

expression qui peut se mettre sous la forme

$$(-1)^s\,\frac{2s+1}{n}\sum_{1}^{n}\frac{\mathrm{A}.\mathrm{B}}{\mathrm{C}}\,\mathrm{D}^s f,$$

où A, B, C sont des coefficients du développement de certaines puissances de $(a+b)$. On a ensuite

$$f^{(l)}(1) = \mathcal{F}_0 + \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2 + \ldots + \mathcal{F}_{l-1}.$$

Les différences successives $Df(1)$, $D^2f(1)$, ... s'obtiennent aussi facilement. Nous avons d'abord

$$\frac{1}{C} D^m \psi_s(x) = D^{m+s} \Phi_s(x)$$

et la série (72) montre que le premier terme effectif de $D^m \psi_s$ provient de $D^{m+s} F_{m+s}(x)$, les termes précédents étant nuls; ce terme est indépendant de x, les suivants ont le facteur $(x-1)$ et s'annulent pour $x=1$. Il ne reste donc qu'un seul terme, et l'on trouve, pour $x=1$,

$$\frac{1}{C} D^m \psi_s(1) = (-1)^{s+m} F_s(n) \frac{1}{m!} \frac{s(s-1)\ldots(s-m+1)}{(n-1)\ldots(n+m)} D^{s+m} F_{s+m}$$

ou bien

$$(84) \quad \left\{ \begin{aligned} D^m \psi_s(1) &= \frac{(-1)^{s+m}}{m!} \frac{s!\,s!}{(2s)!} \frac{(n-m-1)!}{(n-s-1)!} \frac{(s+m)!}{(s-m)!} \\ &= \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(n-m-1)!}{(n-1)!} \frac{(s+m)!}{(s-m)!} \psi_s(1). \end{aligned} \right.$$

En tenant compte de (81), il vient, pour le terme général de $D^m f(1)$,

$$(85) \qquad D^m \mathcal{F}_s = \frac{(-1)^m}{m!} \frac{(n-m-1)!}{(n-1)!} \frac{(s+m)!}{(s-m)!} \mathcal{F}_s.$$

La somme devra être prise depuis $s=m$ jusqu'à $s=l-1$, car, pour $s<m$, $D^m \psi_s$ s'annule, ψ_s étant du degré s. En désignant le coefficient de $\mathcal{F}_s$ par (m, s), on aura donc

$$(86) \quad D^m f^{(l)}(1) = (m, m)\mathcal{F}_m + (m, m+1)\mathcal{F}_{m+1} + \ldots + (m, l-1)\mathcal{F}_{l-1}.$$

Pour le calcul des coefficients, il est bon de noter que $(0, s) = 1$, et

$$(87) \quad \frac{(m, s)}{(m-1, s)} = -\frac{(s+m)(s-m+1)}{m(n-m)} = -\frac{s(s+1) - m(m-1)}{m(n-m)}.$$

M. Tchébychef, dans son Mémoire de 1875, donne un exemple numérique de l'application de ces formules, qui sont particulièrement commodes.

31. On peut enfin, avec M. Tchébychef, chercher l'expression de la somme des carrés des erreurs ou résidus $\Delta^s f$.

En partant de la formule

$$(46)\qquad f(x) = \psi_0(x)\frac{\Sigma f.\psi_0}{\Sigma\psi_0^2} + \psi_1(x)\frac{\Sigma f.\psi_1}{\Sigma\psi_1^2} + \ldots$$

et nous rappelant qu'en vertu de (48) nous avons

$$\Sigma\psi_r\psi_s = 0 \quad \text{pour} \quad r \gtrless s,$$

nous obtiendrons Σf^2 en ne conservant dans f^2 que les carrés des termes successifs de (46),

$$\Sigma f^2 = \Sigma\psi_0^2\left(\frac{\Sigma f\psi_0}{\Sigma\psi_0^2}\right)^2 + \Sigma\psi_1^2\left(\frac{\Sigma f\psi_1}{\Sigma\psi_1^2}\right)^2 + \ldots$$

ou bien

$$(88)\qquad \Sigma f^2 = \frac{[\Sigma f\psi_0]^2}{\Sigma\psi_0^2} + \frac{[\Sigma f\psi_1]^2}{\Sigma\psi_1^2} + \ldots.$$

En allant jusqu'au dernier terme ψ_{n-1}, ces formules reproduisent les valeurs données de f_i et de Σf^2. En nous arrêtant au terme ψ_{l-1}, nous trouvons la valeur approchée $f^{(l)}$, et la différence de Cauchy

$$\Delta^l f = f - f^{(l)} = \psi_l(x)\frac{\Sigma f\psi_l}{\Sigma\psi_l^2} + \ldots$$

représente l'erreur de la formule abrégée. On aura d'ailleurs, toujours à cause de (48),

$$(89)\qquad \Sigma(\Delta^l f)^2 = \frac{[\Sigma f\psi_l]^2}{\Sigma\psi_l^2} + \frac{[\Sigma f\psi_{l+1}]^2}{\Sigma\psi_{l+1}^2} + \ldots$$

et, en comparant (88) et (89),

$$(90)\qquad \Sigma(\Delta^l f)^2 = \Sigma f^2 - \frac{[\Sigma f\psi_0]^2}{\Sigma\psi_0^2} - \ldots - \frac{[\Sigma f\psi_{l-1}]^2}{\Sigma\psi_{l-1}^2}.$$

On en conclut que

$$(91)\qquad \Sigma(\Delta^{l+1} f)^2 = \Sigma(\Delta^l f)^2 - \frac{[\Sigma f\psi_l]^2}{\Sigma\psi_l^2}$$

ou bien

$$(92)\left\{\begin{aligned} &\Sigma(\Delta^l f)^2 - \Sigma(\Delta^{l+1} f)^2 \\ &= \frac{2l+1}{l!\,l!}\,\frac{[\Sigma i(i+1)\ldots(i+l-1)(n-i)\ldots(n-i-l+1)\mathrm{D}^l f]^2}{n(n^2-1)\ldots(n^2-l^2)}.\end{aligned}\right.$$

On a d'ailleurs, pour $l = 1$,

$$\Delta f = f - \frac{1}{n} \Sigma f$$

et

$$\Sigma(\Delta f)^2 = \Sigma f^2 - \frac{1}{n} (\Sigma f)^2;$$

mais le calcul direct de Δf est évidemment plus simple.

32. Je tâcherai maintenant de donner, en quelques mots, une idée des recherches de M. Gram, en conservant toutefois la notation employée jusqu'ici. Il s'agit de déterminer par la méthode des moindres carrés, à l'aide des valeurs données $f_1, f_2, \ldots, f_n$, les coefficients A, B, C, ... de la formule d'interpolation

$$f = \mathrm{A}x^0 + \mathrm{B}x' + \mathrm{C}x'' + \ldots,$$

où $x^0, x', x'', \ldots$ sont des fonctions connues de x. Si la précision des observations est variable et qu'on désigne par v leur poids (l'inverse du carré de l'erreur moyenne), le problème consiste à rendre minima la somme

$$\mathrm{M}_l = \Sigma v(f - f^l)^2,$$

où f^l, qu'on peut aussi écrire $f^{(l)}$, représente la valeur de f que donnerait la formule, arrêtée à l termes (la somme étendue à toutes les observations). Il en résulte l équations de condition de la forme

$$\Sigma v(f - f^l)x^i = 0 \qquad (i = 0, 1, \ldots, l-1).$$

En posant

$$\Sigma v f x^i = s_i, \qquad \Sigma v x^i x^j = p_{ij}, \tag{93}$$

elles deviennent

$$s_i = \mathrm{A}p_{i0} + \mathrm{B}p_{i1} + \mathrm{C}p_{i2} + \ldots \tag{94}$$

et elles déterminent les l coefficients A, B, C, ... dont les valeurs dépendent du nombre l, tandis que les quantités s_i et p_{ij} en sont évidemment indépendantes.

Si nous prenons un terme de plus, f^l devient f^{l+1}, et les nouveaux coefficients sont donnés par $l+1$ équations de la même forme, dont nous retrancherons les précédentes. En désignant les différences des coefficients respectifs par a, b, c, ... et faisant,

pour simplifier l'écriture des formules, $l = 2$, nous aurons les deux systèmes d'équations

$$\begin{aligned} s_0 &= Ap_{00} + Bp_{01} + Cp_{02}, & 0 &= ap_{00} + bp_{01} + Cp_{02}, \\ s_1 &= Ap_{10} + Bp_{11} + Cp_{12}, & 0 &= ap_{10} + bp_{11} + Cp_{12}, \\ s_2 &= Ap_{20} + Bp_{21} + Cp_{22}; & f^{(3)} - f^{(2)} &= ax^0 + bx' + Cx''. \end{aligned}$$

En égalant les deux valeurs de C, fournies par le premier et le second système, et qui sont des rapports de déterminants, il vient

$$C = \frac{[p_{00}p_{11}s_2]}{[p_{00}p_{11}p_{22}]} = \frac{[p_{00}p_{11}]}{[p_{00}p_{11}x'']}[f^{(3)} - f^{(2)}],$$

d'où l'on tire

$$f^{(3)} - f^{(2)} = \frac{[p_{00}p_{11}s_2]}{[p_{00}p_{11}p_{22}]} \frac{[p_{00}p_{11}x'']}{[p_{00}p_{11}]}.$$

Pour $l = 1$, on aurait

$$f^{(1)} = \frac{s_0}{p_{00}} x^0,$$

et l'on trouve ainsi, par additions successives,

$$(95)\quad f = \frac{s_0}{p_{00}} x^0 + \frac{[p_{00}s_1]}{[p_{00}p_{11}]} \frac{[p_{00}x']}{p_{00}} + \frac{[p_{00}p_{11}s_2]}{[p_{00}p_{11}p_{22}]} \frac{[p_{00}p_{11}x'']}{[p_{00}p_{11}]} + \ldots.$$

On obtient donc pour f une série ordonnée suivant des polynômes qui sont des fonctions linéaires de x^0, x', x'', ... En les désignant par $\psi_m(x)$, nous aurons

$$(96)\qquad \psi_m(x) = [p_{00}p_{11}\ldots x^m] = \begin{vmatrix} p_{00} & p_{01} & \ldots & p_{0m} \\ p_{10} & p_{11} & \ldots & p_{1m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x^0 & x' & \ldots & x^m \end{vmatrix}$$

et, par suite,

$$[p_{00}p_{11}\ldots s_m] = \Sigma v f \psi_m.$$

Enfin le dénominateur du terme général peut s'exprimer par $\Sigma v \psi_m^2$. En effet, on voit facilement que $\Sigma v \psi_m \psi_r$ s'obtient en remplaçant x^i, dans ψ_m, par $\Sigma v x^i \psi_m$; or, cette somme est nulle pour $i < r$, car elle s'obtient en remplaçant, dans ψ_r, la dernière ligne x^0, x', ..., x^r par p_{i0}, p_{i1}, ..., p_{ir}; pour $i = r$, elle représente le déterminant

$$[p_{00}p_{11}\ldots p_{rr}] = P^{(r)}.$$

Il s'ensuit que $\Sigma v \psi_m \psi_r$ s'annule pour $m < r$, et, par raison de

symétrie, aussi pour $r < m$; pour $r = m$, il reste le produit de $P^{(r)}$ par son premier déterminant mineur. On aura donc

$$(97) \qquad \begin{cases} \Sigma \rho \psi_r \psi_s = 0 & \text{pour } r \gtrless s, \\ \Sigma \rho \psi_r^2 = P^{(r-1)} P^{(r)}. \end{cases}$$

Ces relations expriment la propriété caractéristique des fonctions ψ qui peuvent servir à développer f en séries *selon le principe des moindres carrés*. La « série d'interpolation » a la forme

$$(98) \qquad f = \frac{\Sigma \rho f \psi_0}{\Sigma \rho \psi_0^2} \psi_0(x) + \frac{\Sigma \rho f \psi_1}{\Sigma \rho \psi_1^2} \psi_1(x) + \ldots,$$

où $\psi_0(x) = x^0$. En l'arrêtant à ψ_m, elle représente le résultat de la *compensation* des observations données par une série procédant suivant les fonctions $x^0, x', \ldots, x^m$. C'est proprement une formule d'interpolation si le nombre des termes $(m+1)$ égale n, et une formule d'approximation pour $m + 1 < n$.

La série (98) coïncide avec celle de M. Tchébychef dans le cas où $x^0, x', \ldots$ sont les *puissances* de x. Lorsque $x^0, x', \ldots$ sont des fonctions ψ qui satisfont aux conditions (97), on a évidemment $p_{ij} = 0$ pour $i \gtrless j$, et les coefficients A, B, C, ... prennent la forme caractéristique de la série (98); on a, par exemple,

$$C = \frac{s_2}{p_{22}} = \frac{\Sigma \rho f x''}{\Sigma \rho x'' x''}.$$

On trouve enfin, comme on le vérifie aisément, pour la somme qui devient un minimum,

$$(99) \qquad M_l = \Sigma \rho f^2 - Q_l,$$

ou

$$Q_l = \Sigma \rho f f^{(l)} = \frac{(\Sigma \rho f \psi_0)^2}{\Sigma \rho \psi_0^2} + \frac{(\Sigma \rho f \psi_1)^2}{\Sigma \rho \psi_1^2} + \ldots,$$

et M_l tend vers zéro à mesure que l augmente.

33. M. Tchébychef n'avait considéré que les séries d'interpolation qui découlent d'un développement suivant les puissances ascendantes de x, en particulier pour $\rho = 1$; dans ce cas, pour des ordonnées équidistantes, la série (98) donne nos formules (52) ou (67). M. Gram indique encore une autre série pour $\rho = n_x$.

En prenant $\psi_i = \frac{F(x)}{(x - x_i)}$, on arrive à la formule d'interpolation de Lagrange

$$f = f_0 \frac{\psi_0(x)}{\psi_0(x_0)} + f_1 \frac{\psi_1(x)}{\psi_1(x_1)} + \ldots.$$

Les séries trigonométriques par lesquelles on représente une suite d'observations d'un phénomène périodique (Bessel, 1827; *Astr. Nachr.*, n° 136) fournissent un autre exemple de séries d'interpolation, construites selon le principe des moindres carrés.

Lorsque la série doit servir à représenter une fonction continue $f(x)$, on remplace les intervalles de l'argument x par dx, les sommes se changent en intégrales définies, la première équation (97) devient

$$(100) \qquad \int_\alpha^\beta v \psi_r \psi_s \, dx = 0,$$

et le développement a la propriété de rendre minima l'intégrale

$$\int_\alpha^\beta v (f - f^l)^2 \, dx,$$

f^l ou $f^{(l)}$ étant toujours la valeur de f fournie par l termes de la série, et v une quantité positive fonction de x. On se trouve ainsi conduit aux fonctions V, étudiées autrefois par Sturm et Liouville (1836-1837).

De ce genre, sont les séries de Fourier ([1]), qui procèdent suivant les sinus et cosinus de mx; on a ici $v = 1$, les limites des intégrales sont $+\pi$ et $-\pi$.

Les fonctions sphériques, ou polynômes de Legendre ([2]), satisfont à la même condition en prenant $v = 1$ et pour limites $+1$ et -1. De même, les fonctions de Bessel, et d'autres polynômes qui sont étudiés dans le Traité de Heine. M. Gram, dans sa Thèse, a indiqué une grande variété de séries d'interpolation; il étudie, notamment, celles qu'on obtient en partant des formules

$$f = (a + bx + cx^2 + \ldots) e^{-x}, \qquad v = e^x$$

([1]) *Voir* la Notice historique de B. Riemann (*Bull. des Sc. math.*, t. V, juillet 1873), et une Note de M. Töpler (*Bull. de l'Acad. de Vienne*, 1876).

([2]) G. Plarr, *Comptes rendus*, mai 1857. — E. Rouché, *Journ. de l'École Polytechnique*, 1858.

et

$$f = (a + bx + cx^2 + \ldots)e^{-x^2}, \qquad v = e^{x^2},$$

les limites étant, dans le premier cas, o et ∞, et dans le second $\pm\infty$.

Pour le développement d'une fonction de deux variables suivant les Y de Laplace, M. F. Neumann a donné en 1838 une ingénieuse méthode que l'on trouve reproduite dans ses *Vorlesungen über die Theorie des Potentials* (1887) : elle suppose les valeurs données distribuées d'une certaine façon qui simplifie beaucoup le calcul des coefficients. Elle s'applique aussi aux polynômes de Legendre. M. Seeliger vient de publier des Tables auxiliaires destinées à faciliter l'application de cette belle méthode (¹).

III.

34. C'est sur un autre principe que reposent les formules que M. Tchébychef a développées dans son Mémoire *sur l'Interpolation dans le cas d'un grand nombre de données*, présenté à l'Académie des Sciences de Saint-Pétersbourg en octobre 1858 (Saint-Pétersbourg, 1859; in-4° de 81 pages). Il s'y propose le problème suivant :

« Étant donnée une suite de valeurs $f_1, f_2, \ldots$ de

$$f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$$

qui correspondent à des valeurs de x équidistantes et très rapprochées entre elles, combiner $f_1, f_2, \ldots$ par simple addition et soustraction, de manière que le résultat final ne contienne que le terme affecté de A_i et que ce terme soit le plus grand possible. »

La solution s'obtient en supposant le nombre des données *infini*. Elle est fournie par des séries dont les coefficients dépendent d'intégrales définies que l'on évalue, par quadratures mécaniques, à l'aide des ordonnées $f_1, f_2, \ldots$. Les formules établies dans cette hypothèse représentent évidemment la limite vers laquelle convergent les résultats de l'interpolation, à mesure qu'augmente le nombre des ordonnées.

On voit déjà que la méthode de M. Tchébychef convient essen-

(¹) *Ueber die interpolatorische Darstellung einer Function durch eine Reihe von Kugelfunctionen*. Munich, 1890.

tiellement aux cas où les données sont très nombreuses, où, par conséquent, la méthode des moindres carrés entraîne des calculs d'une longueur disproportionnée avec les avantages qu'elle procure sous le rapport de la précision du résultat. La méthode des moindres carrés resterait réservée aux cas où le nombre des données n'est pas très grand, parce qu'elle permet d'épuiser, en quelque sorte, les ressources qu'elles offrent pour diminuer l'erreur moyenne à craindre, et aussi pour nous rendre un compte exact du degré d'approximation qui a été atteint.

La méthode de M. Tchébychef a fait, dans ces derniers temps, l'objet d'études importantes, publiées par M. O. Backlund dans le tome VII des *Mélanges mathématiques* de l'Académie de Saint-Pétersbourg (mai 1884) et par M. P. Harzer, dans les n°s 2757-2759 des *Astronomische Nachrichten* (novembre 1886; *voir* aussi *Bull. astr.*, t. III, p. 611). Ces études, qui sont accompagnées d'exemples numériques, nous faciliteront notre tâche.

35. Il s'agit donc de déterminer les coefficients A de la formule d'interpolation

$$(1) \qquad f(x) = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n$$

par des relations de la forme

$$c_i A_i = S_1 f - S_2 f + S_3 f - \ldots \pm S_m f,$$

où S_1, S_2, S_3, ... sont des sommes de valeurs successives de f, ces valeurs étant données en nombre infini pour des valeurs équidistantes de x. En faisant

$$(2) \qquad c_l = (S_1 - S_2 + S_3 - \ldots) x^l,$$

on trouve d'abord

$$(S_1 - S_2 + S_3 - \ldots) f = A_0 c_0 + A_1 c_1 + \ldots + A_n c_n,$$

et, cette expression devant se réduire à un seul terme $A_i c_i$ (avec un facteur c_i aussi grand que possible), on a les conditions

$$(3) \quad c_0 = 0, \quad c_1 = 0, \quad \ldots, \quad c_{i-1} = 0, \quad c_{i+1} = 0, \quad \ldots, \quad c_n = 0.$$

Si les valeurs données sont très rapprochées entre elles, les sommes pourront être remplacées par des intégrales; nous pourrons encore, sans nuire à la généralité des formules, supposer l'argument x contenu entre les limites $+1$ et -1. Cet intervalle étant divisé

en une série de tronçons, ayant pour limites successives

$$-1,\quad a_1,\quad a_2,\quad \ldots,\quad a_m,\quad +1,$$

et correspondant aux sommes partielles S_1, S_2, ..., si nous représentons par le symbole $\underset{m}{\int}$ la suite d'intégrales définies

$$\int_{-1}^{a_1} - \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} - \int_{a_3}^{a_4} + \ldots + (-1)^m \int_{a_m}^{+1}$$

ou bien

$$\int_{-1}^{a_1} + \int_{a_1}^{a_2} + \int_{a_2}^{a_3} + \int_{a_3}^{a_4} + \ldots \pm \int_{a_m}^{+1},$$

nous aurons

$$\underset{m}{\int} f(x)\,dx = \underset{m}{[F(x)]} = 2F(a_1) - 2F(a_2) + \ldots \mp 2F(a_m) \pm F(+1) - F(-1),$$

$F(x)$ étant l'intégrale indéfinie $\int f(x)\,dx$. Ensuite

$$(4) \qquad c_i A_i = \underset{m}{\int} f.x,$$

où le second membre s'obtient par voie de quadrature mécanique, à l'aide des valeurs données de f, tandis que le coefficient c_i ou $c_i^{(m)}$ peut être calculé, une fois pour toutes, par la formule

$$(5) \qquad c_l^{(m)} = \underset{m}{\int} x^l\,dx,$$

d'où l'on tire

$$(6) \qquad \frac{1+l}{2}\,c_l^{(m)} = a_1^{l+1} - a_2^{l+1} + \ldots \pm a_m^{l+1} + \frac{(-1)^m + (-1)^l}{2}.$$

Les limites intercalaires a_1, a_2, ..., a_m se déterminent par les conditions (3), en égalant à zéro l'expression (6), dont le dernier terme est, tour à tour, 0 ou ± 1.

En prenant $m = n$, on aurait donc n équations (non linéaires) pour déterminer n inconnues (a_1, a_2, ...) pour chaque valeur particulière de i. Il faudrait ensuite, parmi les racines réelles, choisir celles qui forment une suite régulière entre les limites -1 et $+1$, et qui donnent pour c_i la plus grande valeur possible [1].

---

[1] On ne peut guère recourir ici aux équations de condition $dc_0 = 0$, $dc_1 = 0$, ... que fournit la théorie des maxima relatifs; elles seraient en général incompatibles avec les équations données, à moins de prendre $m > n$ et d'admettre des racines égales (n° 40).

Le mode de solution employé par M. Tchébychef, fort ingénieux, mais d'une application assez pénible, repose sur les remarques suivantes.

On a, en développant suivant les puissances descendantes de x,

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned} &\frac{1}{x+1} - \frac{(-1)^n}{x-1} - \frac{2}{x-a_1} + \frac{2}{x-a_2} - \ldots \\ &= -\sum \frac{(l+1)c_l}{x^{l+2}} = -\frac{(i+1)c_i}{x^{i+2}} - \frac{(n+2)c_{n+1}}{x^{n+3}} - \ldots, \end{aligned}\right.$$

à cause des relations (3), en vertu desquelles les coefficients c_l s'annulent jusqu'à $l = n$, excepté pour $l = i$. En multipliant par dx et intégrant, jusqu'à $x = \infty$, on trouve

$$\log \frac{x+1}{(x-1)^{\pm 1}} \frac{(x-a_2)^2 \ldots}{(x-a_1)^2 \ldots} = \frac{c_i}{x^{i+1}} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+2}} + \ldots.$$

Cette relation peut s'écrire

$$(8)\qquad \frac{x+1}{(x-1)^{\pm 1}} \frac{(x-a_2)^2(x-a_4)^2 \ldots}{(x-a_1)^2(x-a_3)^2 \ldots} = e^{\frac{c_i}{x^{i+1}} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+2}} + \frac{c_{n+2}}{x^{n+3}} + \ldots}.$$

On pourrait aussi la déduire de la formule générale qui exprime la dépendance mutuelle des coefficients d'une équation algébrique et des sommes des puissances semblables de ses racines :

$$(9)\qquad (x-a)(x-b)(x-c)\ldots = x^n . e^{-\frac{s_1}{x} - \frac{s_2}{2x^2} - \frac{s_3}{3x^3} - \ldots},$$

où $s_n = a^n + b^n + c^n + \ldots$.

36. M. Tchébychef se sert de la formule (8) pour déterminer c_i et les racines $a_1, a_2, \ldots$, à l'aide de raisonnements empruntés à la théorie des fractions continues, en considérant les réduites qui se rencontrent dans le développement de l'expression

$$\sqrt{\frac{(x-1)^{\pm 1}}{x+1}}\, e^{\frac{c_i}{2x^{i+1}}}.$$

Mais il convient peut-être de circonscrire tout de suite le problème, en constatant que la résolution directe des équations (3), en supposant $m = n$, donne toujours n racines symétriques (c'est-à-dire égales et de signes contraires) dans le cas de $i = n, n-2, n-4, \ldots$ et $n-1$ racines symétriques (la $n^{\text{ième}}$ étant ± 1) dans le cas de $i = n-1, n-3, \ldots$. On peut, en effet, prouver que la

solution est fournie par n ou $n-1$ racines symétriques $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, ... (dont l'une égale à zéro, si leur nombre est impair).

Pour le démontrer, remarquons que, si nous changeons x en $-x$, la formule (8) devient

$$(10)\qquad \frac{x-1}{(x+1)^{\pm 1}}\,\frac{(x+a_2)^2(x+a_4)^2\ldots}{(x+a_1)^2(x+a_3)^2\ldots}=e^{\pm\frac{c_i}{x^{i+1}}\pm\frac{c_{n+1}}{x^{n+2}}+\ldots}.$$

Lorsque i est un nombre pair, en multipliant (8) par (10), c_i s'élimine, et l'on trouve, suivant que n est pair ou impair,

$$(11)\qquad i \text{ pair}\begin{cases} n \text{ pair}\ldots\ldots & \dfrac{x^2-a_2^2}{x^2-a_1^2}\,\dfrac{x^2-a_4^2}{x^2-a_3^2}\ldots=e^{\frac{c_{n+1}}{x^{n+2}}+\ldots},\\ n \text{ impair}\ldots & \dfrac{x^2-1}{x^2-a_1^2}\,\dfrac{x^2-a_2^2}{x^2-a_3^2}\ldots=e^{\frac{c_{n+2}}{x^{n+3}}+\ldots}.\end{cases}$$

Lorsque i est impair, on élimine c_i en divisant (8) par (10); on trouve ainsi

$$(12)\ i \text{ impair}\begin{cases} n \text{ impair}\ldots & \dfrac{x+a_1}{x-a_1}\,\dfrac{x+a_3}{x-a_3}\ldots\dfrac{x-a_2}{x+a_2}\,\dfrac{x-a_4}{x+a_4}\ldots=e^{\frac{c_{n+1}}{x^{n+2}}+\ldots}\\ n \text{ pair}\ldots\ldots & \dfrac{x+1}{x-1}\,\dfrac{x+a_1}{x-a_1}\,\dfrac{x+a_3}{x-a_3}\ldots\dfrac{x-a_2}{x+a_2}\,\dfrac{x-a_4}{x+a_4}\ldots=e^{\frac{c_{n+2}}{x^{n+3}}+\ldots}\end{cases}$$

Comme le degré des dénominateurs ne dépasse pas n ou $n+1$, nous pouvons remplacer les exponentielles par l'unité. Les relations (11) signifient dès lors que les quantités a_1^2, a_3^2, ... coïncident avec a_2^2, a_4^2, ...; dans le cas de n impair, il y en a une qui est égale à l'unité.

Or, on ne peut faire $a_1=a_2$, ..., car la formule (8) conduirait alors à des conditions incompatibles; il s'ensuit que les racines a_1, a_3, ... sont égales à $-a_2$, $-a_4$, ..., en d'autres termes, que les racines sont *symétriques* (dans le cas d'un nombre impair, il y en a une qui se réduit à l'unité, de sorte que $m=n-1$).

Les formules (12), relatives au cas de i impair, nous disent que les racines sont encore symétriques, mais l'une se réduit à zéro; et, si n est pair, une autre se réduit à l'unité. Pour le comprendre, il suffira d'écrire les équations pour $n=4$ et $n=5$

$$(x+1)(x+a_1)\overset{n=4}{(x+a_3)}(x-a_2)(x-a_4)=(x-1)(x-a_1)(x-a_3)(x+a_2)(x+a_4),$$

$$\overset{n=5}{(x+a_1)(x+a_3)(x+a_5)}(x-a_2)(x-a_4)=(x-a_1)(x-a_3)(x-a_5)(x+a_2)(x+a_4)$$

En faisant $x = 0$, elles donnent respectivement $a_1 a_2 a_3 a_4 = 0$ et $a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 = 0$, d'où il suit qu'il y a toujours une racine nulle. En faisant, dans la première, $x = 1$, le second membre s'annule, et il s'ensuit qu'il faut faire $a_4 = 1$ ou $a_1 = -1$, ce qui réduit le nombre des racines utiles à trois. On a donc encore $m = n - 1$.

37. En résumé, le nombre m des racines est égal à n, lorsque n et i sont de même parité ($i = n$, $n - 2$, $n - 4$, ...); on aura $m = n - 1$ (l'une des racines coïncidant avec ± 1) pour $i = n - 1$, $n - 3$, ... Nous n'avons plus, dès lors, que des racines symétriques $\pm a$, $\pm b$, $\pm c$, ... (y compris la racine zéro, si leur nombre est impair). La formule (6) devient

$$(13) \qquad \frac{1+l}{4} c_l^{(m)} = \frac{(-1)^l + (-1)^m}{2}\left(\frac{1}{2} - a^{l+1} + b^{l+1} - \ldots\right),$$

et l'on voit que, de cette façon, on aura, pour $m = n$,

$$c_{n-1} = 0, \quad c_{n-3} = 0, \quad \ldots, \quad c_{n+1} = 0, \quad c_{n+3} = 0, \quad \ldots,$$

et pour $m = n - 1$,

$$c_n = 0, \quad c_{n-2} = 0, \quad \ldots, \quad c_{n+2} = 0, \quad c_{n+4} = 0, \quad \ldots.$$

Il reste donc, dans le premier cas, les conditions $c_n = 0$, $c_{n-2} = 0$, ..., et dans le second, les conditions $c_{n-1} = 0$, $c_{n-3} = 0$, qui, les unes et les autres, peuvent s'écrire

$$(14) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2} = a^{m+1} - b^{m+1} + c^{m+1} - \ldots, \\ \frac{1}{2} = a^{m-1} - b^{m-1} + c^{m-1} - \ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Le nombre des inconnues a, b, c, ... est $\frac{m}{2}$, ou bien $\frac{m-1}{2}$ (plus la racine 0). En même temps,

$$i = m, \quad m - 2, \quad m - 4, \quad \ldots \quad \text{et} \quad n = m \quad \text{ou} \quad m + 1.$$

Il est entendu que celle des équations (14) qui correspond à $c_i = 0$ doit être remplacée par la suivante

$$(15) \qquad \frac{1}{2} - (-1)^i \frac{1+i}{4} c_i = a^{i+1} - b^{i+1} + c^{i+1} - \ldots.$$

On trouve ainsi, par exemple,

$$\begin{array}{l} m=2 \\ n=2 \text{ ou } 3 \end{array} \left\{ \begin{array}{llll} i=2 & \ldots & a=\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}-a^3=\frac{3}{4}c_2, \\ i=0 & \ldots & a^3=\frac{1}{2}, & \frac{1}{2}-a=\frac{1}{4}c_0, \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} m=3 \\ n=3 \text{ ou } 4 \\ b=0 \end{array} \left\{ \begin{array}{llll} i=3 & \ldots & a^2=\frac{1}{2}, & a^4-\frac{1}{2}=c_3, \\ i=1 & \ldots & a^4=\frac{1}{2}, & a^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}c_1, \end{array} \right.$$

de sorte que les limites intercalaires et les coefficients c_i deviennent, pour $n=3$,

	Limites.	Coefficients c.
$n=3$	$\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$	$c_0=-1.1748$
	$\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}}$ et 0	$c_1=+0,4142$
	$\pm\frac{1}{2}$	$c_2=+0,5$
	$\pm\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$ et 0	$c_3=-0,25.$

On a ensuite, par exemple, pour $i=2$,

$$\frac{1}{2}A_2=\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f\,dx-\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1} f\,dx,$$

où les intégrales devront être évaluées par quadratures mécaniques. Pour $m=4, 5, 6, \ldots$, on trouve de même

$$\begin{array}{l} m=4 \\ n=4 \text{ ou } 5 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} i=4 \ \ldots\ a-b=a^3-b^3=\frac{1}{2}, & a^5-b^5=\frac{1}{2}-\frac{5}{4}c_4, \\ i=2 \ \ldots\ a-b=a^5-b^5=\frac{1}{2}, & a^3-b^3=\frac{1}{2}-\frac{3}{4}c_2, \\ i=0 \ \ldots\ a^3-b^3=a^5-b^5=\frac{1}{2}, & a-b=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}c_0, \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} m=5 \\ n=5 \text{ ou } 6 \\ c=0 \end{array} \left\{ \begin{array}{ll} i=5 \ \ldots\ a^2-b^2=a^4-b^4=\frac{1}{2}, & a^6-b^6=\frac{1+3c_5}{2}, \\ i=3 \ \ldots\ a^2-b^2=a^6-b^6=\frac{1}{2}, & a^4-b^4=\frac{1+2c_3}{2}, \\ i=1 \ \ldots\ a^4-b^4=a^6-b^6=\frac{1}{2}, & a^2-b^2=\frac{1+c_1}{2}, \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} m=6 \\ n=6 \text{ ou } 7 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} i=6 \ \ldots\ a-b+c=a^3-b^3+c^3=a^5-b^5+c^5=\frac{1}{2}, \\ \qquad a^7-b^7+c^7=\frac{1}{2}-\frac{7}{4}c_6, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array} \right.$$

38. La résolution de ces équations n'offre aucune difficulté sérieuse.

Dans le cas particulier de $i = m$, ainsi que l'a remarqué M. Tchébychef, les valeurs des constantes peuvent s'obtenir d'une manière explicite. Les conditions sont ici

$$(16)\quad \begin{cases} a^{m+1} - b^{m+1} + c^{m+1} - \ldots = \frac{1}{2} - (-1)^m \frac{1+m}{4} c_m^{(m)}, \\ a^{m-1} - b^{m-1} + c^{m-1} - \ldots = \frac{1}{2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

On y satisfait en posant

$$(17)\quad \begin{cases} a = \cos\frac{\pi}{m+1}, \quad b = \cos\frac{2\pi}{m+1}, \quad c = \cos\frac{3\pi}{m+1}, \quad \ldots, \\ c_m^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m-1}}. \end{cases}$$

Cela résulte des relations

$$(18)\quad \begin{cases} \cos\frac{\pi}{2n+1} - \cos\frac{2\pi}{2n+1} + \ldots \pm \cos\frac{n\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}, \\ \cos\frac{\pi}{n} \quad - \cos\frac{2\pi}{n} \quad + \ldots \pm \cos\frac{n-1}{n}\pi = \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}, \end{cases}$$

comme on le vérifie aisément.

Les formules (3) et (13) montrent que, pour $i = m$, nous avons

$$(19)\quad c_0^{(m)} = 0, \quad c_1^{(m)} = 0, \quad \ldots, \quad c_{m-1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+3}^{(m)} = 0, \quad \ldots.$$

On trouve ensuite

$$(20)\quad c_{2n}^{(0)} = \frac{2}{2n+1}, \qquad c_{2n+1}^{(1)} = \frac{-2}{2n+2}$$

et, pour $m > 1$,

$$(21)\quad \begin{cases} c_{m+2}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m+1}} \frac{m+1}{1}, \qquad c_{m+4}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m+3}} \frac{m+1}{1} \frac{m+4}{2}, \\ c_{m+6}^{(m)} = \frac{(-1)^m}{2^{m+5}} \frac{m+1}{1} \frac{m+5}{2} \frac{m+6}{3}, \quad \ldots, \end{cases}$$

ou bien, pour $m > 2i$,

$$(22)\quad (-1)^m 2^{m-1} c_m^{(m-2i)} = m_i - m_{i-1},$$

où le second membre représente les coefficients du développement de $(1-x)(1+x)^m$.

39. Dans le cas général, on peut se servir avec avantage des relations bien connues qui existent entre les coefficients p_n d'une équation algébrique et les sommes s_n des puissances semblables de ses racines, à savoir

$$s_1 = p_1, \qquad s_2 = p_1^2 - 2p_2, \qquad s_3 = p_1^3 - 3p_1p_2 + 3p_3, \qquad \ldots,$$

ou bien, si l'on fait $s_1^n - s_n = nq_n$,

$$q_3 = p_1p_2 - p_3, \qquad q_5 = (p_1^2 - p_2)q_3 + p_1p_4 - p_5,$$

$$q_7 = (p_1^2 - p_2)q_5 + (p_1p_3 - p_4)q_3 + p_1p_6 - p_7, \qquad \ldots.$$

On trouve ainsi, par exemple,

m.	i.	
4	4...	$4a - 1 = 4b + 1 = \sqrt{5}; \qquad c_4 = \frac{1}{8}.$
4	2...	$(4a-1)^2 = (4b+1)^2 = 2\sqrt{13} - 1; \qquad 4c_2 = 3 - \sqrt{13}.$
4	0...	$2(a-b)^6 - 5(a-b)^3 + 9(a-b) = \frac{5}{2}.$
5	5...	$a = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \qquad b = \frac{1}{2}; \qquad c_5 = -\frac{1}{16}.$
5	3...	$4a^2 - 1 = 4b^2 + 1 = \sqrt{5}; \qquad 4c_3 = \sqrt{5} - 2.$
5	1...	$\begin{cases} (a^2 - b^2)^4 - 2(a^2 - b^2) + \frac{3}{4} = 0; \\ a^8 - \frac{2}{3}a^6 - \frac{1}{2}a^4 + \frac{1}{4} = 0; \qquad \left(\frac{1 + c_1}{2}\right)^4 = \frac{1}{4} + c_1. \end{cases}$
6	6...	$\begin{cases} a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{8} = 0; \\ a = \cos\frac{\pi}{7}, \qquad b = \cos\frac{2\pi}{7}, \qquad c = \cos\frac{3\pi}{7}; \qquad c_6 = \frac{1}{32}. \end{cases}$
6	4...	$\begin{cases} a^3 - \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{8}(\sqrt{29} - 1)a + \frac{1}{16}(\sqrt{29} - 3) = 0; \\ c_4 = -\frac{1}{16}(\sqrt{29} - 5). \end{cases}$
6	2...	$\begin{cases} a^3 - \frac{1}{2}a^2 + p_2 a - p_3 = 0, \\ p_2^3 + \frac{1}{4}p_2^2 - \frac{1}{4}p_2 = \frac{1}{64}, \qquad 4p_3 + \frac{1}{8p_2} + 1 = 0. \end{cases}$

$m.$	$i.$	
6	0...	$\begin{cases} a^3 - p_1 a^2 + p_2 a - p_3 = 0, \\ 2p_1^{10} - 15p_1^7 + 63p_1^5 - 225p_1^3 + \frac{315}{2} p_1^2 - \frac{175}{4} p_1 + 18 = 0, \\ q_5 = (p_1^2 - p_2) q_3, \qquad q_3 = p_1 p_2 - p_3. \end{cases}$
7	7...	$\begin{cases} b^2 = \frac{1}{2}, \qquad a^2 + c^2 = 1, \qquad a^2 - a^4 = c^2 - c^4 = \frac{1}{8}, \qquad d = 0, \\ a = \cos\frac{\pi}{8}, \qquad b = \cos\frac{\pi}{4}, \qquad c = \sin\frac{\pi}{8}, \qquad c_7 = -\frac{1}{64}. \end{cases}$

Voici d'ailleurs les valeurs numériques des constantes :

$m.$	$n.$	Coefficients.	Limites intercalaires.			
0	0 ou 1...	$c_0 = 2$	...			
1	1 ou 2...	$c_1 = -1$	0			
2	2 ou 3...	$c_2 = +0,5$	$\pm 0,5$			
		$c_0 = -1,1748$	$\pm 0,79370$			
3	3 ou 4...	$c_3 = -0,25$	$\pm 0,70711$	et 0		
		$c_1 = +0,41421$	$\pm 0,84090$	et 0		
4	4 ou 5...	$c_4 = +0,125$	$\pm 0,80902$	$\pm 0,30902$		
		$c_2 = -0,15139$	$\pm 0,87305$	$\pm 0,37305$		
		$c_0 = +0,83443$	$\pm 0,89729$	$\pm 0,60591$		
5	5 ou 6...	$c_5 = -0,0625$	$\pm 0,86603$	$\pm 0,5$	et 0	
		$c_3 = +0,05901$	$\pm 0,89945$	$\pm 0,55589$	et 0	
		$c_1 = -0,22777$	$\pm 0,91681$	$\pm 0,67411$	et 0	
6	6 ou 7...	$c_6 = +0,03125$	$\pm 0,90097$	$\pm 0,62349$	$\pm 0,22252$	
		$c_4 = -0,02407$	$\pm 0,91975$	$\pm 0,66389$	$\pm 0,24414$	
		$c_2 = +0,06653$	$\pm 0,93091$	$\pm 0,72574$	$\pm 0,29483$	
		$c_0 = -0,64758$	$\pm 0,93839$	$\pm 0,76036$	$\pm 0,48387$	
7	7 ou 8...	$c_7 = -0,01562$	$\pm 0,92388$	$\pm 0,70711$	$\pm 0,38268$	et 0

.....

Pour mieux faire saisir l'esprit de la méthode, transcrivons ici les formules finales pour $n = 3$.

$$f(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3.$$

$$-1,1748 A_0 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^{a} f dx + \int_{a}^{1} f dx; \qquad a = 0,7937,$$

$$0,4142 A_1 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^{0} f dx + \int_{0}^{a} f dx - \int_{a}^{1} f dx; \qquad a = 0,8409,$$

$$\tfrac{1}{2} A_2 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^{a} f dx + \int_{a}^{1} f dx; \qquad a = 0,5,$$

$$-\tfrac{1}{4} A_3 = \int_{-1}^{-a} f dx - \int_{-a}^{0} f dx + \int_{0}^{a} f dx - \int_{a}^{1} f dx; \qquad a = 0,7071.$$

Les intégrales s'obtiennent par quadratures mécaniques, à l'aide des valeurs données de f, que l'on suppose nombreuses et rapprochées entre elles. Il faut, bien entendu, commencer par ramener à ± 1 les limites x_0, x_n de l'argument donné x, en posant

$$x = \frac{x_n + x_0}{2} + \frac{x_n - x_0}{2} x. \tag{23}$$

40. On pourrait aussi établir des formules analogues en prenant $m > n$. Ainsi, pour $n = 2$, $m = 4$, on aurait les limites $\pm a$, $\pm b$, avec les conditions

$$a - b = \tfrac{1}{2}, \qquad a^3 - b^3 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{3}{4} c_2;$$

la meilleure valeur de c_2 s'obtiendrait pour $a = +\frac{1}{4}$, $b = -\frac{1}{4}$, à savoir $c_2 = \frac{5}{8}$. On trouverait alors

$$\int_4 = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} - \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} + \int_{\frac{1}{4}}^{-\frac{1}{4}} - \int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} + \int_{\frac{1}{4}}^{1} = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} - 3\int_{-\frac{1}{4}}^{+\frac{1}{4}} + \int_{\frac{1}{4}}^{1}.$$

Mais cela revient à introduire encore des facteurs numériques qui multiplient les intégrales, et ce serait déjà une extension du problème. Il est vrai que la relation

$$\tfrac{5}{8} A_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{4}} f\,dx - 3\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{1}{4}} f\,dx + \int_{\frac{1}{4}}^{1} f\,dx$$

ne serait guère moins simple que celle-ci

$$\tfrac{1}{2} A_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} f\,dx - \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f\,dx + \int_{\frac{1}{2}}^{1} f\,dx.$$

41. M. Tchébychef a fait l'application de ses formules à un exemple numérique, emprunté aux recherches de Kopp sur la densité de l'eau. M. Backlund a traité, à son tour, quelques exemples de nature à intéresser les astronomes (réduction d'observations spectrales, comparaison de deux Catalogues, distances mesurées d'un couple).

L'évaluation des intégrales qui entrent dans ces formules peut

être abrégée par l'emploi d'un procédé graphique; on peut aussi commencer par régulariser les données d'observation en formant des « lieux normaux » de même poids. M. Tchébychef a d'ailleurs donné une formule très simple pour le calcul approximatif des intégrales, qui se déduit de la formule des trapèzes, et que l'on peut, avec M. Backlund, ramener à cette dernière par l'introduction des valeurs de $f(x)$ qui correspondent aux limites intercalaires. Supposons que la limite a tombe entre les valeurs x_3, x_4 de l'argument pour lesquelles on connaisse f_3, f_4, on fera simplement

$$f_a = f_3 + \frac{a - x_3}{x_4 - x_3}(f_4 - f_3).$$

On aura ensuite, par la formule des trapèzes, en supposant $x_4, x_5, \ldots, x_9$ compris entre a et b,

$$\begin{aligned}
\int_a^b f dx &= \frac{x_4 - a}{2}(f_a + f_4) + \frac{x_5 - x_4}{2}(f_4 + f_5) + \ldots + \frac{b - x_9}{2}(f_9 + f_b) \\
&= \frac{x_4 - a}{2} f_a + \frac{x_5 - a}{2} f_4 + \frac{x_6 - x_4}{2} f_5 + \ldots + \frac{x_9 - x_7}{2} f_8 \\
&\quad + \frac{b - x_8}{2} f_9 + \frac{b - x_9}{2} f_b \\
&= \frac{(x_4 - a)^2 f_3 - (x_3 - a)^2 f_4}{2(x_4 - x_3)} + \frac{x_5 - x_3}{2} f_4 + \frac{x_6 - x_4}{2} f_5 + \ldots \\
&\quad + \frac{x_{10} - x_8}{2} f_9 + \frac{(x_9 - b)^2 f_{10} - (x_{10} - b)^2 f_9}{2(x_{10} - x_9)}.
\end{aligned}$$

42. Un des inconvénients de cette méthode, c'est qu'il faut fixer d'avance le degré de la formule d'interpolation, et recommencer tous les calculs, si le résultat n'est pas satisfaisant. M. Tchébychef a cherché à remédier à ce défaut par sa seconde méthode, fondée sur la formule

$$f(x) = \alpha_0 \theta_0 + \alpha_1 \theta_1 + \ldots + \alpha_n \theta_n, \tag{24}$$

où $\theta_0, \theta_1, \ldots$ sont des polynômes donnés de la forme

$$\theta_l = \beta x^l + \gamma x^{l-2} + \ldots, \tag{25}$$

tandis que les coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ se déduisent des valeurs données de f en faisant

$$\alpha_m = \int_m f(x)\, dx, \tag{26}$$

les limites intercalaires étant ici exclusivement celles fournies par les formules (16), de sorte que

$$\int_0 = \int_{-1}^{+1}, \quad \int_1 = \int_{-1}^{0} - \int_0^{+1}, \quad \int_2 = \int_{-1}^{-\frac{1}{2}} - \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} + \int_{+\frac{1}{2}}^{+1},$$

$$\int_3 = \int_{-1}^{-\sqrt{\frac{1}{2}}} - \int_{-\sqrt{\frac{1}{2}}}^{0} + \int_0^{+\sqrt{\frac{1}{2}}} - \int_{+\sqrt{\frac{1}{2}}}^{+1}, \quad \ldots.$$

D'après ce qui a été dit, ces limites vérifient les conditions

$$(27) \quad c_0^{(m)} = 0, \quad c_1^{(m)} = 0, \quad \ldots, \quad c_{m-1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+1}^{(m)} = 0, \quad c_{m+3}^{(m)} = 0, \quad \ldots,$$

où

$$c_l^{(m)} = \int_m x^l \, dx.$$

On peut déterminer les θ de plusieurs manières. Remarquons d'abord qu'en substituant l'expression (24) dans (26), on doit trouver une identité, d'où il suit que

$$(28) \quad \begin{cases} \displaystyle\int_m \theta_m \, dx = 1, \\ \displaystyle\int_m \theta_l \, dx = 0 \qquad \text{pour} \qquad l = 0, 1, \ldots, m-1, m+1 \ldots n. \end{cases}$$

Si θ_l a la forme (25), ces conditions sont déjà remplies pour $l = 0$, $1, \ldots, m-1, m+1, m+3, \ldots$, à cause de (27); il ne reste donc que les conditions relatives à $l = m, m+2, m+4, \ldots$, qui suffisent pour déterminer les coefficients de θ_l, puisque

$$\int_m \theta_l \, dx = \beta c_l^{(m)} + \gamma c_{l-2}^{(m)} + \ldots.$$

On aurait, en faisant successivement $m = l, l-2, l-4, \ldots$,

$$1 = \beta c_l^{(l)},$$
$$0 = \beta c_l^{(l-2)} + \gamma c_{l-2}^{(l-2)},$$

les coefficients $c_l^{(m)}$ étant donnés par les formules (19). On trouve ainsi

$$(29) \quad \begin{cases} \theta_0 = \frac{1}{2}, \quad \theta_1 = -x, \quad \theta_2 = 2x^2 - \frac{2}{3}, \quad \theta_3 = -4x^3 + 2x, \\ \theta_4 = 8x^4 - 6x^2 + \frac{2}{5}, \quad \theta_5 = -16x^5 + 16x^3 - \frac{8}{3}, \quad \ldots \end{cases}$$

Il est d'ailleurs visible que la forme (25), adoptée pour θ_l, est exigée par les conditions (28), qui montrent que θ_l est nécessairement une fonction paire ou impaire, de degré l.

43. Nous allons maintenant déterminer les polynômes θ d'une manière plus directe. Il convient, pour cela, de poser

$$\int_0^x f(x)\,dx = \mathrm{F}(x) \tag{30}$$

d'où

$$\alpha_m = \underset{m}{[\mathrm{F}]} = -\mathrm{F}(-1) + 2\mathrm{F}(a_1) - 2\mathrm{F}(a_2) + \ldots + (-1)^m \mathrm{F}(1).$$

Nous ferons en même temps

$$2(m+1)\int_0^x \theta_m\,dx = (-1)^m \mathrm{X}_{m+1}, \tag{31}$$

de sorte que (24) devient

$$\left\{\begin{aligned} 2\mathrm{F}(x) &= \alpha_0 \mathrm{X}_1 - \tfrac{1}{2}\alpha_1 \mathrm{X}_2 + \tfrac{1}{3}\alpha_2 \mathrm{X}_3 - \ldots, \\ 2\mathrm{F}(x) &= \mathrm{X}_1 \underset{0}{[\mathrm{F}]} - \tfrac{1}{2}\mathrm{X}_2 \underset{1}{[\mathrm{F}]} + \tfrac{1}{3}\mathrm{X}_3 \underset{2}{[\mathrm{F}]} - \ldots. \end{aligned}\right. \tag{32}$$

En désignant par z une quantité arbitraire, et prenant

$$f(x) = \frac{1}{(z-x)^2}, \qquad \mathrm{F}(x) = \underset{0}{\overset{x}{}}\left[\frac{1}{z-x}\right],$$

on aurait donc

$$2\underset{0}{\overset{x}{}}\left[\frac{1}{z-x}\right] = \mathrm{X}_1 \underset{0}{\left[\frac{1}{z-x}\right]} - \frac{1}{2}\mathrm{X}_2 \underset{1}{\left[\frac{1}{z-x}\right]} + \ldots. \tag{33}$$

Or, d'après ce que nous avons vu, par les formules (6), (7), on a (pour $i = m$)

$$\begin{aligned} \underset{m}{\left[\frac{1}{z-x}\right]} &= -\frac{1}{z+1} + \frac{2}{z-a_1} - \frac{2}{z-a_2} + \ldots + \frac{(-1)^m}{z-1} \\ &= \frac{(m+1)c_m^{(m)}}{z^{m+2}} + \frac{(m+3)c_{m+2}^{(m)}}{z^{m+4}} + \ldots. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $(m+1)c_m^{(m)}$ représente le numérateur de la fraction $\underset{m}{\left[\frac{1}{z-x}\right]}$, et qu'on aura

$$\underset{m}{\left[\frac{1}{z-x}\right]} = \frac{(m+1)c_m^{(m)}}{(z^2-1)(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_m)}. \tag{34}$$

Or

$$c_m^{(m)} = (-1)^m 2^{1-m},$$

et les racines $a_1, a_2, \ldots$ sont $\cos\frac{\pi}{m+1}$, $\cos\frac{2\pi}{m+1}, \ldots$. En faisant $z = \cos\zeta$, et nous rappelant que

$$\sin n\zeta = 2^{n-1}\sin\zeta\left(\cos\zeta - \cos\frac{\pi}{n}\right)\left(\cos\zeta - \cos\frac{2\pi}{n}\right)\cdots\left(\cos\zeta - \cos\frac{n-1}{n}\pi\right),$$

il vient

$$(35) \qquad {}_m\left[\frac{1}{z-x}\right] = \frac{(-1)^{m+1}.2(m+1)}{\sin\zeta.\sin(m+1)\zeta}.$$

Si l'on fait encore $2z = \beta + \frac{1}{\beta}$, on trouve

$$-4\sin\zeta\sin n\zeta = \left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^n - \frac{1}{\beta^n}\right)$$

et, par suite,

$$(36) \qquad \frac{(-1)^m}{(m+1)}\,{}_m\left[\frac{1}{z-x}\right] = \frac{4}{\left(\beta - \frac{1}{\beta}\right)\left(\beta^{m+1} - \frac{1}{\beta^{m+1}}\right)}.$$

En substituant cette expression dans (33), et mettant m pour $m+1$, on trouve

$${}_0^x\left[\frac{\beta - \frac{1}{\beta}}{\beta + \frac{1}{\beta} - 2x}\right] = \sum \frac{2X_m}{\beta^m - \frac{1}{\beta^m}}$$

ou bien

$$(37) \quad \sum \frac{2\beta^m X_m}{1-\beta^{2m}} = \frac{1-\beta^2}{1-2\beta x+\beta^2} - \frac{1-\beta^2}{1+\beta^2} = \frac{2\beta^2}{1+\beta^2} + \frac{2\beta(x-\beta)}{1-2\beta x+\beta^2}.$$

Si l'on fait $x = \cos y$, cette relation devient

$$(38) \qquad \sum \frac{\beta^m X_m}{1-\beta^{2m}} = \frac{\beta^2}{1+\beta^2} + \Sigma\beta^m \cos my,$$

d'où l'on tire, en différentiant,

$$(39) \qquad \Sigma(-1)^m \frac{m\beta^m 0_{m-1}}{1-\beta^{2m}} = -\Sigma m\beta^m \frac{\sin my}{2\sin y},$$

puisque

$$(-1)^m 0_m = \frac{1}{m+1}\frac{dX_{m+1}}{2\,dx}.$$

Il en résulte les valeurs suivantes des X :

$$
\begin{array}{ll}
X_1 = \cos y, & X_2 = \cos 2y + 1, \\
X_3 = \cos 3y - \cos y, & X_4 = \cos 4y - 1, \\
X_5 = \cos 5y - \cos y, & X_6 = \cos 6y - \cos 2y, \\
X_7 = \cos 7y - \cos y, & X_8 = \cos 8y - 1, \\
X_9 = \cos 9y - \cos 3y, & X_{10} = \cos 10y - \cos 2y, \\
X_{11} = \cos 11y - \cos y, & X_{12} = \cos 12y - \cos 4y, \\
X_{13} = \cos 13y - \cos y, & X_{14} = \cos 14y - \cos 2y, \\
X_{15} = \cos 15y - \cos 5y - \cos 3y + \cos y, & X_{16} = \cos 16y - 1, \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots
\end{array}
$$

On aurait également

$$
\begin{array}{ll}
2\theta_0 = 1, & 2\theta_1 = -\dfrac{\sin 2y}{\sin y}, \\
2\theta_2 = \dfrac{\sin 3y}{\sin y} - \dfrac{1}{3}, & 2\theta_3 = -\dfrac{\sin 4y}{\sin y}, \\
2\theta_4 = \dfrac{\sin 5y}{\sin y} - \dfrac{1}{5}, & 2\theta_5 = -\dfrac{\sin 6y}{\sin y} + \dfrac{1}{3}\dfrac{\sin 2y}{\sin y}, \\
\dots\dots\dots\dots, & \dots\dots\dots\dots\dots\dots,
\end{array}
$$

ou bien

$$\theta_0 = \tfrac{1}{2}, \quad \theta_1 = -\cos y, \quad \theta_2 = \cos 2y + \tfrac{1}{3}, \quad \theta_3 = -\cos 3y - \cos y, \quad \dots.$$

Il est donc facile d'exprimer les X et les θ en fonctions de $x = \cos y$ ou de $\xi = 2x$.

44. On pourrait aussi procéder comme il suit. Supposons que l'on ait $f(x) = A_0 + A_1 x + \dots$; en substituant dans les coefficients α_m, on aurait

$$A_0 + A_1 x + \dots = \Sigma \theta_l \int_l (A_0 + A_1 x + \dots),$$

par conséquent, à cause des relations (27),

$$x^m = \theta_m c_m^{(m)} + \theta_{m-2} c_m^{(m-2)} + \dots. \tag{40}$$

Avec les valeurs (21) des coefficients $c^{(m)}$, on trouve

$$\left\{
\begin{aligned}
\frac{1}{2}(-2x)^m = \theta_m &+ \frac{m-1}{1}\theta_{m-2} + \frac{m(m-3)}{1.2}\theta_{m-4} \\
&+ \frac{m(m-1)(m-5)}{1.2.3}\theta_{m-6} + \dots + \frac{2^m}{m+1}\theta_0,
\end{aligned}
\right. \tag{41}$$

où il faut écrire θ_1 au lieu de θ_0, si m est impair. L'intégration donne ensuite, en mettant n pour $m+1$ et ξ pour $2x$,

$$(42)\quad \frac{1}{2}\xi^n = X_n + nX_{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}X_{n-4} + \ldots + 2^{n-1}X_1 \,(\text{ou } 2^{n-2}X_2).$$

En remplaçant X_1 par x ou X_2 par $2x^2$, on trouverait, pour n impair ou pair,

$$(43)\quad \left\{\begin{matrix} 2^{n-1}(x^n - x) \\ 2^{n-1}(x^n - x^2) \end{matrix}\right\} = X_n + nX_{n-2} + \frac{n(n-1)}{1.2}X_{n-4} + \ldots.$$

Ces formules conduisent aux relations suivantes :

$$\begin{array}{ll}
\frac{1}{2}\xi = X_1 & \frac{1}{2}\xi^2 = X_2 \\
\frac{1}{2}\xi^3 = X_3 + 4X_1 & \frac{1}{2}\xi^4 = X_4 + 4X_2 \\
\frac{1}{2}\xi^5 = X_5 + 5X_3 + 16X_1 & \frac{1}{2}\xi^6 = X_6 + 6X_4 + 16X_2 \\
\frac{1}{2}\xi^7 = X_7 + 7X_5 + 21X_3 + 64X_1 & \frac{1}{2}\xi^8 = X_8 + 8X_6 + 28X_4 + 64X_2 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{1}{2} = \theta_0, \quad \frac{1}{2}\xi^2 = \theta_2 + \frac{2}{3}, & -\frac{1}{2}\xi = \theta_1, \quad -\frac{1}{2}\xi^3 = \theta_3 - \xi, \\
\frac{1}{2}\xi^4 = \theta_4 + 3\theta_2 + \frac{8}{5}, & -\frac{1}{2}\xi^5 = \theta_5 + 4\theta_3 - \frac{8}{3}\xi, \\
\frac{1}{2}\xi^6 = \theta_6 + 5\theta_4 + 9\theta_2 + \frac{32}{7}, \ldots, & -\frac{1}{2}\xi^7 = \theta_7 + 6\theta_5 + 14\theta_3 - 8\xi,
\end{array}$$

d'où l'on tire encore

$$\begin{aligned}
2X_1 &= \xi, \\
2X_2 &= \xi^2, \\
2X_3 &= \xi\,(\xi^2 - 4), \\
2X_4 &= \xi^2(\xi^2 - 4), \\
2X_5 &= \xi\,(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 1), \\
2X_6 &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 2), \\
2X_7 &= \xi\,(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 1)(\xi^2 - 2), \\
2X_8 &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 2)^2, \\
2X_9 &= \xi\,(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 3)(\xi^2 - 1)^2, \\
2X_{10} &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 3)(\xi^2 - 2)(\xi^2 - 1), \\
2X_{11} &= \xi\,(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 3)(\xi^2 - 1)(\xi^4 - 3\xi^2 + 1), \\
2X_{12} &= \xi^2(\xi^2 - 4)(\xi^2 - 2)^2(\xi^4 - 4\xi^2 + 2), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

En développant, on aurait

$$
\begin{aligned}
2X_1 &= \xi,\\
2X_2 &= \xi^2,\\
2X_3 &= \xi^3 - 4\xi,\\
2X_4 &= \xi^4 - 4\xi^2,\\
2X_5 &= \xi^5 - 5\xi^3 + 4\xi,\\
2X_6 &= \xi^6 - 6\xi^4 + 8\xi^2,\\
2X_7 &= \xi^7 - 7\xi^5 + 14\xi^3 - 8\xi,\\
2X_8 &= \xi^8 - 8\xi^6 + 20\xi^4 - 16\xi^2,\\
2X_9 &= \xi^9 - 9\xi^7 + 27\xi^5 - 31\xi^3 + 12\xi,\\
2X_{10} &= \xi^{10} - 10\xi^8 + 35\xi^6 - 50\xi^4 + 24\xi^2,\\
2X_{11} &= \xi^{11} - 11\xi^9 + 44\xi^7 - 77\xi^5 + 55\xi^3 - 12\xi,\\
2X_{12} &= \xi^{12} - 12\xi^{10} + 54\xi^8 - 112\xi^6 + 104\xi^4 - 32\xi^2,\\
2X_{13} &= \xi^{13} - 13\xi^{11} + 65\xi^9 - 156\xi^7 + 182\xi^5 - 91\xi^3 + 12\xi,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

On en tire les valeurs de θ_m, en différentiant et divisant par $\frac{\pm 1}{m+1}$:

$$
\begin{aligned}
2\theta_0 &= 1,\\
-2\theta_1 &= \xi,\\
2\theta_2 &= \xi^2 - \tfrac{4}{3},\\
-2\theta_3 &= \xi^3 - 2\xi,\\
2\theta_4 &= \xi^4 - 3\xi^2 + \tfrac{4}{5},\\
-2\theta_5 &= \xi^5 - 4\xi^3 + \tfrac{8}{3}\xi,\\
2\theta_6 &= \xi^6 - 5\xi^4 + 6\xi^2 - \tfrac{8}{7},\\
-2\theta_7 &= \xi^7 - 6\xi^5 + 10\xi^3 - 4\xi,\\
2\theta_8 &= \xi^8 - 7\xi^6 + 15\xi^4 - \tfrac{31}{3}\xi^2 + \tfrac{4}{3},\\
-2\theta_9 &= \xi^9 - 8\xi^7 + 21\xi^5 - 20\xi^3 + \tfrac{24}{5}\xi,\\
2\theta_{10} &= \xi^{10} - 9\xi^8 + 28\xi^6 - 35\xi^4 + 15\xi^2 - \tfrac{12}{11},\\
-2\theta_{11} &= \xi^{11} - 10\xi^9 + 36\xi^7 - 56\xi^5 + \tfrac{104}{3}\xi^3 - \tfrac{16}{3}\xi,\\
2\theta_{12} &= \xi^{12} - 11\xi^{10} + 45\xi^8 - 84\xi^6 + 70\xi^4 - 21\xi^2 + \tfrac{12}{13}.
\end{aligned}
$$

M. Harzer a calculé des Tables qui donnent les logarithmes des θ (jusqu'à θ_{12}) pour tous les centièmes de l'argument x, depuis $x = 0$ jusqu'à $x = 1$ (*Astr. Nachr.*, 2759). Il a aussi donné deux exemples complètement développés, où l'application des formules est facilitée par l'emploi d'un procédé graphique (voir *Bull.*, t. III, p. 615).

C'est au même ordre d'idées que se rattachent les recherches de M. Tchébychef sur les formules de quadrature à coefficients égaux, communiquées à l'Association française pour l'avancement des Sciences, à l'occasion du Congrès de Lyon [elles ont été reproduites dans le *Journal de Mathématiques,* 1873; *voir* aussi l'*Étude sur les formules d'approximation* (*ibid.,* 1880)].

IV.

45. Nous terminerons ces études par quelques remarques sur les formules de quadrature, qui sont étroitement liées aux formules d'interpolation. Il faut, pour cela, reprendre la notation symbolique du n° 8, en la complétant et la modifiant un peu.

Désignant toujours par Δ les différences ordinaires, nous savons que l'opération $(1+\Delta)^{\pm n}$ a pour effet de changer y_0 en $y_{\pm n}$. Quelques auteurs (Boole, Merrifield) remplacent $1+\Delta$ par le symbole E, de sorte qu'on a

$$E = 1 + \Delta, \qquad y_1 = Ey_0, \qquad y_{\pm n} = E^{\pm n} y_0.$$

Si nous réservons, d'autre part, le signe D pour les différences médianes, nous pourrons, pour dédoubler l'opération D^2, supposer qu'entre les termes donnés on ait intercalé ceux qui correspondent aux arguments fractionnaires $\pm\frac{1}{2}$, $\pm\frac{3}{2}$, ... et poser

$$(1)\quad \begin{cases} D^2 = \dfrac{\Delta^2}{1+\Delta} = E + E^{-1} - 2, \\ D = \dfrac{\Delta}{\sqrt{1+\Delta}} = E^{\frac{1}{2}} - E^{-\frac{1}{2}}, \qquad 2\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2} = E^{\frac{1}{2}} + E^{-\frac{1}{2}}, \\ \Delta = D\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2} + \frac{1}{2}D^2. \end{cases}$$

L'opération fictive D se trouve ainsi parfaitement définie; mais, en fait, elle est remplacée par une moyenne arithmétique que, pour plus de clarté, je désignerai maintenant par la lettre M (et non plus par D, comme au n° 9), de sorte qu'on aura

$$(2)\quad \begin{cases} 2M = \Delta + \dfrac{\Delta}{1+\Delta} = E - E^{-1}, \\ M = D\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}, \\ \Delta = \frac{1}{2}D^2 + M, \\ E^{\pm 1} = 1 + \frac{1}{2}D^2 \pm M = \left(\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2} \pm \frac{1}{2}D\right)^2. \end{cases}$$

Le facteur $\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}$ sert donc à passer de l'opération fictive D à l'opération réelle M, par laquelle s'obtiennent les différences intermédiaires; et si l'on veut confondre les différences d'ordre pair ou impair dans la même notation, et mettre, par exemple, D^{2n+1} au lieu de MD^{2n}, il n'y aura qu'à supprimer dans les développements le facteur $\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}$, ou à diviser par $\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}$.

Il faut seulement distinguer entre les différences $D^s(0)$, relatives à y_0, et les différences $D^s(\frac{1}{2})$ qui sont rapportées à $y_{\frac{1}{2}} = \sqrt{1+\Delta}.y_0$. Les premières résultent des opérations

$$1,\quad M,\quad D^2,\quad MD^2,\quad D^4,\quad \ldots,$$

et les secondes des opérations

$$\frac{M}{D},\quad D,\quad MD,\quad D^3,\quad MD^3,\quad \ldots.$$

Pour ramener les unes et les autres à la notation D^0, D^1, D^2, D^3, D^4, ..., il faut, dans le cas de l'argument (0), diviser par $\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}$ les développements où ne figurent que les différences d'ordre impair et, dans le cas de l'argument $(\frac{1}{2})$, ceux où figurent les différences d'ordre pair. On a d'ailleurs

$$\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}} = 1 - \frac{1}{8}D^2 + \frac{3}{128}D^4 - \frac{5}{1024}D^6 + \ldots.$$

46. La différence Δ correspondant à l'accroissement fini h de l'argument x, on a, entre différences et dérivées, les relations symboliques

$$(3)\qquad \begin{cases} E = 1 + \Delta = e^{d}, \\ d = \log(1+\Delta), \end{cases}$$

où, pour abréger, nous mettons d pour $h\frac{d}{dx}$. On aura donc, en indiquant par des exposants négatifs des sommes ou des intégrales

$$(4)\qquad \begin{cases} \Delta^{\pm n} = (e^{d} - 1)^{\pm n}, \\ d^{\pm n} = \log^{\pm n}(1+\Delta). \end{cases}$$

Il est entendu que les exponentielles et les logarithmes doivent être remplacés par leurs développements en séries. Lagrange donne les coefficients de ces développements dans son Mémoire de 1772

Sur une nouvelle espèce de calcul (*Œuvres*, t. III, p. 458). Dans les cas les plus simples, on a

$$\Delta = e^{d} - 1 = d + \frac{1}{2} d^2 + \frac{1}{6} d^3 + \frac{1}{24} d^4 + \ldots,$$

$$d.\Delta^{-1} = \frac{d}{e^{d}-1} = 1 - \frac{1}{2} d + \frac{1}{12} d^2 - \frac{1}{720} d^4 + \frac{1}{30240} d^6 - \ldots$$
$$-(-1)^n \frac{B_n}{(2n)!} d^{2n} + \ldots,$$

où B_n est le $n^{\text{ième}}$ nombre de Bernoulli; puis

$$d = \log(1+\Delta) = \Delta - \frac{1}{2}\Delta^2 + \frac{1}{3}\Delta^3 - \frac{1}{4}\Delta^4 + \ldots,$$

$$\Delta d^{-1} = \frac{\Delta}{\log(1+\Delta)} = 1 + \frac{1}{2}\Delta - \frac{1}{12}\Delta^2 + \frac{1}{24}\Delta^3$$
$$- \frac{19}{720}\Delta^4 + \frac{3}{160}\Delta^5 - \frac{863}{60480}\Delta^6 + \frac{275}{24192}\Delta^7 - \ldots.$$

Ces développements permettent d'établir les formules usuelles de la manière la plus directe, en faisant usage des définitions

$$d = h\frac{d}{dx}, \qquad d^{-1} = \frac{1}{h}\int \ldots dx,$$

$$\Delta^{-1} = \sum, \qquad \sum_0^n y = y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1}.$$

Le symbole Δ^{-1}, comme le remarque Boole, a un caractère interrogatif : la réponse consiste à renverser l'opération. Mais l'intégrale finie Δ^{-1} ou Σ n'est déterminée que par le point d'arrivée (y_{n-1}); le point de départ reste arbitraire; on est libre d'ajouter une constante d'intégration C, comme on fait pour l'intégrale $\int$. L'indétermination cesse dès qu'on définit $\sum$ et $\int$ en indiquant la limite inférieure.

Pour abréger les formules, je désignerai encore par S la somme

$$(5) \qquad S = \sum_0^n y + \tfrac{1}{2}(y_n - y_0) = \tfrac{1}{2}y_0 + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \tfrac{1}{2}y_n;$$

hS représente alors la somme des trapèzes contenus entre les

ordonnées $y_0, y_1, \ldots, y_n$, qui figure dans la formule de quadrature la plus simple

$$(6) \qquad \int_0^{nh} y\,dx = h\mathrm{S}.$$

47. Les relations équivalentes

$$(7) \qquad \mathrm{d} = \Delta \frac{\mathrm{d}}{e^{\mathrm{d}}-1}, \qquad \sum = \frac{1}{e^{\mathrm{d}}-1},$$

conduisent immédiatement à la formule sommatoire de Maclaurin ou d'Euler [1] sous ses deux formes. La première donne, en désignant par $y', y'', \ldots$ les dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$,

$$hy' = \Delta y - \tfrac{1}{2} h\Delta y' + \tfrac{1}{12} h^2 \Delta y'' - \tfrac{1}{720} h^4 \Delta y^{\mathrm{IV}} + \ldots$$

ou bien

$$\Delta y = h(y' + \tfrac{1}{2}\Delta y') - \tfrac{1}{12} h^2 \Delta y'' + \tfrac{1}{720} h^4 \Delta y^{\mathrm{IV}} - \ldots,$$

ce qu'on peut écrire

$$(8) \quad y_1 - y_0 = \frac{h}{2}(y'_1 + y'_0) - \frac{h^2}{12}(y''_1 - y''_0) + \frac{h^4}{720}(y^{\mathrm{IV}}_1 - y^{\mathrm{IV}}_0) - \ldots.$$

La seconde donne

$$\sum y = \frac{1}{h}\int y\,dx - \frac{1}{2}y + \frac{h}{12}y' - \frac{h^3}{720}y''' + \ldots$$

ou bien

$$\frac{1}{h}\int y\,dx = \sum y + \frac{1}{2}y - \frac{h}{12}y' + \frac{h^3}{720}y''' - \ldots,$$

et l'on voit que la formule d'Euler est à deux fins : elle peut servir de formule sommatoire $\left(\text{pour trouver } \sum\right)$ ou de formule de quadrature $\left(\text{pour trouver } \int y\,dx\right)$. Mais il faut la compléter, soit en ajoutant une constante d'intégration C, soit en introduisant deux

---

[1] On peut consulter, sur cette formule, un Mémoire de Malmsten (1847), ou bien J. Tannery, *Introduction à la Théorie des fonctions d'une variable*, p. 352-363.

limites, ce qui donne

$$(9)\qquad \frac{1}{h}\int_0^{nh} y\,dx = \mathrm{S} - \frac{h}{12}(y'_n - y'_0) + \frac{h^3}{720}(y'''_n - y'''_0) - \ldots,$$

S étant la somme définie par l'expression (5). Le premier terme de la formule d'Euler est donc le second membre de la formule des trapèzes.

Si, au lieu des relations (7), nous avions utilisé la suivante

$$\Delta = \frac{e^{\mathrm{d}} - 1}{e^{\mathrm{d}} + 1}(2 + \Delta) = \mathrm{Th}\,\frac{\mathrm{d}}{2}(2 + \Delta),$$

nous aurions trouvé la formule de Boole

$$(10)\qquad \Delta y = \frac{h}{2}(y'_1 + y'_0) - \frac{h^3}{24}(y'''_1 + y'''_0) + \frac{h^5}{240}(y^{\mathrm{v}}_1 + y^{\mathrm{v}}_0) - \ldots,$$

puisque $(2 + \Delta)y_0 = y_1 + y_0$.

48. En partant de la relation

$$(11)\qquad \mathrm{d}^{-1} = \frac{1}{\log(1 + \Delta)} = \Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\Delta + \ldots,$$

Lagrange obtient directement la formule de quadrature

$$(12)\qquad \frac{1}{h}\int y\,dx = \Sigma y + \frac{1}{2}y - \frac{1}{12}\Delta y + \frac{1}{24}\Delta^2 y - \ldots.$$

Laplace (*Méc. cél.*, t. IV, p. 206) y arrive par un détour. Il commence par démontrer la relation

$$(13)\qquad \frac{1}{h}\int_0^{h} y\,dx = y_0 + \frac{1}{2}\Delta y_0 - \frac{1}{12}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{24}\Delta^3 y_0 - \ldots,$$

qu'il obtient en intégrant la formule d'interpolation de Newton, et qui s'écrirait directement

$$\Delta\mathrm{d}^{-1} = \frac{\Delta}{\log(1 + \Delta)},$$

puis il en déduit la formule (12) par une sommation ($\Sigma\Delta = 1$). En introduisant des limites, cette formule devient

$$(14)\qquad \frac{1}{h}\int_0^{nh} y\,dx = \mathrm{S} - \frac{1}{12}(\Delta y_n - \Delta y_0) + \frac{1}{24}(\Delta^2 y_n - \Delta^2 y_0) - \ldots.$$

Mais les différences Δy_n, $\Delta^2 y_n$, ... sont incommodes parce

qu'elles renferment des ordonnées situées en dehors des limites d'intégration; il y a lieu de recourir à une transformation par différences ascendantes, en posant

$$\log(1+\Delta) = -\log\left(1 - \frac{\Delta}{1+\Delta}\right).$$

Il en résulte

$$\begin{aligned} d^{-1} &= \frac{1+\Delta}{\Delta}\left[1 - \frac{1}{2}\frac{\Delta}{1+\Delta} - \frac{1}{12}\frac{\Delta^2}{(1+\Delta)^2} - \frac{1}{24}\frac{\Delta^3}{(1+\Delta)^3} - \ldots\right] \\ &= \Delta^{-1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{12}\frac{\Delta}{1+\Delta} - \frac{1}{24}\frac{\Delta^2}{(1+\Delta)^2} - \ldots, \end{aligned}$$

et l'on voit que les deux premiers termes sont les mêmes que dans (11), mais que les suivants sont transformés de façon que Δ_n^s devient $\pm\,\Delta_{n-s}^s$. On trouve ainsi

$$(15)\quad \frac{1}{h}\int_0^{nh} y\,dx = S - \frac{1}{12}(\Delta y_{n-1} - \Delta y_0) - \frac{1}{24}(\Delta^2 y_{n-2} + \Delta^2 y_0) - \ldots.$$

C'est la formule que Laplace recommande comme « la plus simple et la plus commode ».

49. Jusqu'ici nous avons fait usage des différences ordinaires Δ. Pour introduire les différences médianes D, on peut se servir des relations (1), (2), (3); mais, pour unifier la notation, il faut diviser par $\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}$ les développements où figurent $D^{2s+1}(0)$ ou $D^{2s}(\frac{1}{2})$.

En ne considérant que les *opérations* D, on aurait

$$(16)\quad \left\{\begin{aligned} D &= e^{\frac{1}{2}d} - e^{-\frac{1}{2}d} = 2\,\mathrm{Sh}\,\tfrac{1}{2}d, \\ 2\sqrt{1+\tfrac{1}{4}D^2} &= e^{\frac{1}{2}d} + e^{-\frac{1}{2}d} = 2\,\mathrm{Ch}\,\tfrac{1}{2}d, \\ d &= \log(1+\tfrac{1}{2}D^2 + M) = 2\log\left(\tfrac{1}{2}D + \sqrt{1+\tfrac{1}{4}D^2}\right), \\ \tfrac{1}{2}d &= \arg\mathrm{Sh}\,\tfrac{1}{2}D = \arg\mathrm{Ch}\sqrt{1+\tfrac{1}{4}D^2}. \end{aligned}\right.$$

S'il s'agit des *différences successives,* il faut distinguer entre $D^n(0)$ et $D^n(\frac{1}{2})$. On aura

$$(17)\ \arg(0)\quad \left\{\begin{aligned} d^{\pm 2n} &= [2\arg\mathrm{Sh}\,\tfrac{1}{2}D]^{\pm 2n}, \\ d^{\pm(2n+1)} &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}}[2\arg\mathrm{Sh}\,\tfrac{1}{2}D]^{\pm(2n+1)}, \end{aligned}\right.$$

$$(18)\ \arg(\tfrac{1}{2})\quad \left\{\begin{aligned} d^{\pm 2n} &= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}}[2\arg\mathrm{Sh}\,\tfrac{1}{2}D]^{\pm 2n}, \\ d^{\pm(2n+1)} &= [2\arg\mathrm{Sh}\,\tfrac{1}{2}D]^{\pm(2n+1)}. \end{aligned}\right.$$

On retrouve ainsi, sous une autre forme, les relations très simples que M. Tisserand a indiquées dans une Note *Sur un point du calcul des différences* (*Comptes rendus,* 28 mars 1870). Les développements s'exécutent sans difficulté. Les formules connues, relatives aux fonctions hyperboliques, donnent

$$2 \operatorname{arg\,Sh} \tfrac{1}{2} D = D - \frac{1}{24} D^3 + \frac{3}{640} D^5 - \frac{5}{7168} D^7 + \ldots,$$

$$(2 \operatorname{arg\,Sh} \tfrac{1}{2} D)^2 = D^2 - \frac{1}{12} D^4 + \frac{1}{90} D^6 - \frac{1}{560} D^8 + \ldots,$$

$$(2 \operatorname{arg\,Sh} \tfrac{1}{2} D)^{-1} = D^{-1} + \frac{1}{24} D - \frac{17}{5760} D^3 + \frac{367}{967680} D^5 - \ldots,$$

$$\frac{2 \operatorname{arg\,Sh} \frac{1}{2} D}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} = D - \frac{1}{6} D^3 + \frac{1}{30} D^5 - \frac{1}{140} D^7 + \ldots,$$

$$\frac{(2 \operatorname{arg\,Sh} \frac{1}{2} D)^{-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4} D^2}} = D^{-1} - \frac{1}{12} D + \frac{11}{720} D^3 - \frac{191}{60480} D^5 + \ldots,$$

et ainsi de suite. On tire de là, par exemple,

$$h \frac{d}{dx} (\tfrac{1}{2}) = D(\tfrac{1}{2}) - \frac{1}{24} D^3(\tfrac{1}{2}) + \frac{3}{640} D^5(\tfrac{1}{2}) - \ldots,$$

$$h \frac{d}{dx} (0) = D(0) - \frac{1}{6} D^3(0) + \frac{1}{30} D^5(0) - \ldots,$$

$$\frac{1}{h} \int_{\frac{1}{2}h}^{nh + \frac{1}{2}h} y\, dx = D^{-1}(n + \tfrac{1}{2}) - D^{-1}(\tfrac{1}{2}) + \frac{1}{24} [D(n + \tfrac{1}{2}) - D(\tfrac{1}{2})] - \ldots,$$

$$\frac{1}{h} \int_0^{nh} y\, dx = D^{-1}(n) - D^{-1}(0) - \frac{1}{12} [D(n) - D(0)] + \ldots.$$

Les D à exposants négatifs sont des sommes qui s'obtiennent en prolongeant le tableau des différences vers la gauche; ce sont les quantités désignées par $'f$, $''f$, ... dans les Mémoires d'Encke sur les quadratures mécaniques (*Jahrbuch,* 1837 et 1862), où ce sujet est traité avec tous les détails qu'il comporte.

50. On arrive aux mêmes résultats en partant des formules de Stirling (n° 8), développées suivant les puissances de t, la pre-

mière pour l'argument (o)

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} y_t = y_0 &+ t\left(D - \frac{1}{6}D^3 + \frac{1}{30}D^5 - \frac{1}{140}D^7 + \ldots\right) \\ &+ \frac{t^2}{2}\left(D^2 - \frac{1}{12}D^4 + \frac{1}{90}D^6 - \ldots\right) \\ &+ \frac{t^3}{2.3}\left(D^3 - \frac{1}{4}D^5 + \frac{7}{120}D^7 - \ldots\right) \\ &+ \frac{t^4}{2.3.4}\left(D^4 - \frac{1}{6}D^6 + \ldots\right) + \frac{t^5}{2.3.4.5}\left(D^5 - \frac{1}{3}D^7 + \ldots\right) + \ldots \end{aligned}\right.$$

et la seconde pour l'argument $(\frac{1}{2})$

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} y_{t+\frac{1}{2}} = y_{\frac{1}{2}} &+ t\left(D - \frac{1}{24}D^3 + \frac{3}{640}D^5 - \ldots\right) \\ &+ \frac{t^2}{2}\left(D^2 - \frac{5}{24}D^4 + \frac{259}{5760}D^6 - \ldots\right) + \frac{t^3}{2.3}\left(D^3 - \frac{1}{8}D^5 + \ldots\right) \\ &+ \frac{t^4}{2.3.4}\left(D^4 - \frac{7}{24}D^6 + \ldots\right) + \frac{t^5}{2.3.4.5}(D^5 - \ldots) + \ldots. \end{aligned}\right.$$

Les coefficients des puissances de t représentent évidemment des dérivées.

Nous écrirons maintenant n à la place de t.

Pour obtenir les expressions de $d^{\pm 1}$, relatives à $y_n = f(nh)$, que nous désignerons par $d^{\pm 1}(n)$, il suffit de différentier ou d'intégrer les formules de Stirling par rapport à n. Nous pourrions également les établir à l'aide des notations symboliques, en remarquant que

$$(21)\quad \left\{\begin{aligned} &d(n) = E^n d(o) = e^{nd} d(o), \\ &\frac{d(n) + d(-n)}{2} = \mathrm{Ch}\, n d . d(o), \\ &\frac{d(n) - d(-n)}{2} = \mathrm{Sh}\, n d . d(o), \\ &D = 2\,\mathrm{Sh}\,\frac{d}{2}, \qquad M = \mathrm{Sh}\, d. \end{aligned}\right.$$

Les fonctions hyperboliques $\mathrm{Ch}\, n d$ et $\mathrm{Sh}\, n d$ étant exprimées par $\mathrm{Sh}\, d$ et $\mathrm{Sh}\,\frac{d}{2}$, on trouve d'abord

$$\mathrm{Ch}\, n d = 1 + \frac{n^2}{1.2}D^2 + \frac{n^2(n^2-1)}{1.2.3.4}D^4 + \ldots,$$

$$\mathrm{Sh}\, n d = M\left[n + n\frac{n^2-1}{1.2.3}D^2 + n\frac{(n^2-1)(n^2-4)}{1.2.3.4.5}D^4 + \ldots\right].$$

On a ensuite, en divisant par le facteur de réduction $\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}$ la série des différences d'ordre impair,

$$\frac{d(n)+d(-n)}{2}=\left(1+\frac{n^2}{1.2}D^2+\ldots\right)\frac{2\,\mathrm{Arg\,Sh}\,\frac{1}{2}D}{\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}}$$
$$=D+\left(\frac{n^2}{2}-\frac{1}{6}\right)D^3+\left(\frac{n^4}{24}-\frac{n^2}{8}+\frac{1}{30}\right)D^5+\ldots,$$

puis, en omettant le facteur de réduction dans le cas des différences d'ordre pair, et remplaçant M par $\frac{D+\frac{1}{4}D^3}{\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}}$,

$$\frac{d(n)-d(-n)}{2}=\left(n+n\frac{n^2-1}{1.2.3}D^2+\ldots\right)(D+\tfrac{1}{4}D^3)\frac{2\,\mathrm{Arg\,Sh}\,\frac{1}{2}D}{\sqrt{1+\frac{1}{4}D^2}}$$
$$=nD^2+\left(\frac{n^3}{6}-\frac{n}{12}\right)D^4+\left(\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{36}+\frac{n}{90}\right)D^6+\ldots,$$

où les D se rapportent à l'argument (0).

Nous n'insisterons pas davantage sur la démonstration des formules de ce genre, que l'on trouve longuement développées dans les Mémoires d'Encke et de Hansen (*Relationen zwischen Summen und Differenzen*). Oppolzer, à son tour, a traité ce sujet dans le premier Chapitre du tome II de son Traité des Orbites (*Différentiation et intégration numériques*). Les formules prennent beaucoup de place, et elles sont d'ailleurs suffisamment connues.

52. Des formules de quadrature d'un aspect très différent sont celles où figurent, non plus les différences successives des ordonnées, mais les ordonnées elles-mêmes, et dont la plus simple est la formule des trapèzes. A cette catégorie appartiennent les formules de Cotes, qui supposent des ordonnées équidistantes; celles de Gauss, qui sont moins commodes, mais qui permettent d'atteindre une précision double; celles de Jacobi et celles de M. Tchébychef, à coefficients égaux, etc. En dehors des Mémoires de Gauss, de Jacobi, de Tchébychef (*Journal de Mathém.*, 1873), on peut consulter ceux de Clausen et de Minding (*Journal de Crelle*, t. VI), Christoffel (*ibid.*, t. LV), Mehler (*ibid.*, t. LXIII), Encke (*Jahrbuch*, 1863), Schellbach (1877), et un travail plus récent de M. B. Baillaud (1881). J'ai résumé la plupart de ces tra-

vaux dans mon *Étude sur les formules d'approximation qui servent à calculer la valeur numérique d'une intégrale définie* (*Journal de Mathém.*, 1880; *voir* aussi *Comptes rendus*, 8 mars et 19 avril 1880, 16 juillet 1883, et une Note de M. Callandreau, *ibid.*, 3 mai 1880). Il faut enfin citer les recherches de M. Stieltjes (*Ann. de l'École Norm.*, 1884), de M. A. Markoff (*Math. Ann.*, 1884), de M. J. Deruyts (*Bull. de l'Acad. de Belg.*, 1886). On trouvera aussi quelques remarques intéressantes dans le Rapport de M. Merrifield.

Je voudrais seulement, pour terminer, indiquer en quelques mots le parti qu'on peut tirer des formules (24) et (25) du n° 6, en supposant les ordonnées distribuées d'une manière symétrique. Soient donc $y_0, y_1, y'_1, y_2, y'_2, \ldots$ les ordonnées correspondant aux arguments $0, \pm a, \pm b, \ldots$, et posons

$$y_0 = \sigma_0, \qquad \frac{y_1 + y'_1}{2} = \sigma_1, \qquad \frac{y_2 + y'_2}{2} = \sigma_2, \qquad \ldots,$$
$$\frac{y_1 - y'_1}{2a} = \delta_1, \qquad \frac{y_2 - y'_2}{2b} = \delta_2, \qquad \ldots.$$

Les formules en question pourront s'écrire

$$\begin{aligned} y = {} & \sigma_0 + \delta_1 . x + \sigma'_0 . x^2 + \delta'_1 . x(x^2 - a^2) \\ & + \sigma''_0 . x^2(x^2 - a^2) + \delta''_1 . x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + \ldots \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} y = {} & \sigma_1 + \delta_1 . x + \sigma'_1 (x^2 - a^2) + \delta'_1 . x(x^2 - a^2) \\ & + \sigma''_1 (x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + \delta''_1 . x(x^2 - a^2)(x^2 - b^2) + \ldots, \end{aligned}$$

où

$$\delta'_1 = \frac{\delta_2 - \delta_1}{b^2 - a^2} = \frac{\delta_1}{a^2 - b^2} + \frac{\delta_2}{b^2 - a^2},$$
$$\delta''_1 = \frac{\delta'_2 - \delta'_1}{c^2 - a^2} = \frac{\delta_1}{(a^2 - b^2)(a^2 - c^2)} + \frac{\delta_2}{(b^2 - a^2)(b^2 - c^2)} + \frac{\delta_3}{(c^2 - a^2)(c^2 - b^2)},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et d'une manière analogue

$$\sigma'_0 = \frac{\sigma_1 - \sigma_0}{a^2}, \qquad \sigma'_1 = \frac{\sigma_2 - \sigma_1}{b^2 - a^2}, \qquad \ldots,$$
$$\sigma''_0 = \frac{\sigma'_1 - \sigma'_0}{b^2}, \qquad \sigma''_1 = \frac{\sigma'_2 - \sigma'_1}{c^2 - a^2}, \qquad \ldots,$$

et ainsi de suite.

L'intégration donne les formules de quadrature pour intervalles inégaux

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} y\,dx = \sigma_0 + \frac{1}{3}\sigma_0' + \left(\frac{1}{5} - \frac{a^2}{3}\right)\sigma_0'' + \left(\frac{1}{7} - \frac{a^2+b^2}{5} + \frac{a^2b^2}{3}\right)\sigma_0''' + \ldots$$

et

$$\frac{1}{2}\int_{-1}^{+1} y\,dx = \sigma_1 + \left(\frac{1}{3} - a^2\right)\sigma_1' + \left(\frac{1}{5} - \frac{a^2+b^2}{3} + a^2b^2\right)\sigma_1'' + \ldots,$$

dont la première suppose un nombre impair, et la seconde un nombre pair d'ordonnées. Pour avoir des intervalles égaux, il suffit de faire, dans la première formule, $b = 2a$, $c = 3a$, ..., et dans la seconde $b = 3a$, $c = 5a$, ... En faisant encore, dans la première, $a = \frac{1}{n}$ pour $2n+1$ ordonnées, et dans la seconde, $a = \frac{1}{2n-1}$ pour $2n$ ordonnées, de sorte que les ordonnées se trouvent distribuées d'une manière uniforme entre les limites de l'intétégrale, on obtient les formules de Cotes. Si, enfin, nous prenons pour $a, b, c, \ldots$ les racines de l'équation $P_n = 0$, où P_n est un polynôme de Legendre, nous avons la formule de quadrature de Gauss, car alors, en vertu d'un théorème connu, un certain nombre de coefficients de la formule s'annulent, et il en résulte que le degré de précision $2n-1$ s'obtient avec n ordonnées.

53. Avec les coordonnées équidistantes $y_0, y_1, y_1', y_2, y_2', \ldots$ correspondant aux arguments $0, \pm a, \pm 2a, \ldots$ (dont aucun ne coïncide avec 2π), on peut encore construire une formule d'interpolation qui mérite d'être mentionnée. Elle se compose d'expressions analogues aux fonctions symétriques D_0^n du n° 2, où x_0, x_1, x_2, x_3, ... sont remplacés par les cosinus 1, $\cos a$, $\cos 2a$, $\cos 3a$, ... de sorte qu'elles prennent la forme

$$D_0^n(f) = \frac{f_0}{(1-\cos a)(1-\cos 2a)(1-\cos 3a)\ldots} + \frac{f_1}{(\cos a - 1)(\cos a - \cos 2a)(\cos a - \cos 3a)\ldots} + \ldots.$$

Les numérateurs f sont, d'une part, les quantités $s_0, s_1, s_2, \ldots$ et

$t_1, t_2, \ldots$ qui dépendent des constantes données,

$$s_0 = y_0, \quad s_1 = \frac{y_1 + y'_1}{2}, \quad s_2 = \frac{y_2 + y'_2}{2}, \quad \ldots,$$
$$t_1 = \frac{y_1 - y'_1}{2\sin a}, \quad t_2 = \frac{y_2 - y'_2}{2\sin 2a}, \quad \ldots,$$

et de l'autre les quantités $1, \cos x, \cos 2x, \ldots$ et $\frac{\sin x}{\sin a}, \frac{\sin 2x}{\sin 2a}, \ldots$.
On a donc, par exemple,

$$D_0(s) = \frac{s_0 - s_1}{1 - \cos a}, \quad D_0(\cos x) = \frac{1 - \cos x}{1 - \cos a}, \quad D_1(t) = \frac{t_1 - t_2}{\cos a - \cos 2a},$$

$$D_0^2(s) = \frac{s_0}{(1 - \cos a)(1 - \cos 2a)} + \frac{s_1}{(\cos a - 1)(\cos a - \cos 2a)} + \frac{s_2}{(\cos 2a - 1)(\cos 2a - \cos a)},$$

$$D_0^2(\cos x) = \frac{1}{(1 - \cos a)(1 - \cos 2a)} + \frac{\cos x}{(\cos a - 1)(\cos a - \cos 2a)} + \frac{\cos 2x}{(\cos 2a - 1)(\cos 2a - \cos a)},$$

$$D_1^2(t) = \frac{t_1}{(\cos a - \cos 2a)(\cos a - \cos 3a)} + \frac{t_2}{(\cos 2a - \cos a)(\cos 2a - \cos 3a)} + \frac{t_3}{(\cos 3a - \cos a)(\cos 3a - \cos 2a)},$$

et ainsi de suite. On trouve aussi

$$\frac{1}{2^{n-1}} D_0^n(\cos x) = \frac{(1 - \cos x)(\cos a - \cos x)(\cos 2a - \cos x)\ldots[\cos(n-1)a - \cos x]}{(1 - \cos na)(\cos a - \cos na)(\cos 2a - \cos na)\ldots[\cos(n-1)a - \cos na]},$$

$$\frac{1}{2^{n-1}} D_1^{n-1}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right) = \frac{\sin x(\cos a - \cos x)(\cos 2a - \cos x)\ldots[\cos(n-1)a - \cos x]}{\sin na(\cos a - \cos na)(\cos 2a - \cos na)\ldots[\cos(n-1)a - \cos na]},$$

de sorte que $D_0^n(\cos x)$ s'annule pour $x = 0, a, 2a, \ldots, (n-1)a$ et se réduit à 2^{n-1} pour $x = na$. Avec ces notations, le terme général de la formule d'interpolation peut s'écrire

$$\frac{(-1)^n}{2^{n-1}}(1 - \cos na)(\cos a - \cos na)\ldots[\cos(n-1)a - \cos na] D_0^n(s) D_0^n(\cos x)$$
$$+ \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \sin na(1 - \cos na)\ldots[\cos(n-1)a - \cos na] D_1^{n-1}(t) D_1^{n-1}\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right)$$

et, en simplifiant l'expression des premiers termes, elle devient

$$
\begin{aligned}
y = s_0 &+ (s_1 - s_0)\frac{1-\cos x}{1-\cos a} \\
&+ \frac{1}{2}(\cos 2a - 1)(\cos 2a - \cos a)D_0^2(s)D_0^2(\cos x) \\
&+ \frac{1}{4}(\cos 3a - 1)(\cos 3a - \cos a)(\cos 3a - \cos 2a)D_0^3(s)D_0^3(\cos x) + \ldots \\
&+ t_1 \sin x + \frac{1}{2}\sin 2a \frac{t_2 - t_1}{\cos a - \cos 2a}\left(\frac{\sin x}{\sin a} - \frac{\sin 2x}{\sin 2a}\right) \\
&+ \frac{1}{4}\sin 3a(\cos 3a - \cos a)(\cos 3a - \cos 2a)D_1^2(t)D_1^2\left(\frac{\sin x}{\sin a}\right) + \ldots
\end{aligned}
$$

On a ainsi le développement de y suivant les sinus et cosinus des multiples de x.

FIN.

ERRATA.

Page 9, ligne 3 en remontant, *au lieu de* y^0, *lisez* y_0.

Page 31, note, *ajoutez :* Voir aussi les *Remarques sur la théorie des moindres carrés*, par E. Catalan (*Mém. de l'Acad. de Belgique*, 1878).

17599 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

LIBRAIRIE GAUTHIER-VILLARS ET FILS,

QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS, 55, A PARIS.

DARBOUX (**Gaston**), Membre de l'Institut, Professeur à la Faculté des Sciences. — **Leçons sur la Théorie générale des surfaces et les applications géométriques du Calcul infinitésimal.** 3 volumes grand in-8, avec figures dans le texte, se vendant séparément :

Ire Partie. — *Généralités. Coordonnées curvilignes. Surfaces minima*; 1887 ..... 15 fr.

IIe Partie. — *Les congruences et les équations linéaires aux dérivées partielles. Des lignes tracées sur les surfaces*; 1889 ..... 15 fr.

IIIe Partie. — *Lignes géodésiques et courbure géodésique. Paramètres différentiels. Déformation des surfaces*; 1890. Prix pour les souscripteurs ..... 15 fr.

Les deux premiers fascicules de la IIIe Partie ont paru.

LUCAS (**Édouard**), Professeur de Mathématiques au Lycée Saint-Louis. — **Théorie des nombres.** *Le calcul des nombres entiers. Le calcul des nombres rationnels. La divisibilité arithmétique.* Grand in-8, avec figures dans le texte; 1891 ..... 15 fr.

RADAU (**R.**). — **Tables de l'intégrale** $\Psi(Z) = e^{Z^2}\int_Z^\infty e^{t^2}\,dt$. In-4; 1884 ..... 4 fr. 50 c.

RADAU (**R.**). — **Travaux concernant le problème des trois corps et la théorie des perturbations.** Grand in-8; 1881 ..... 1 fr. 50 c.

RADAU (**R.**). — **Recherches sur la théorie des Réfractions astronomiques.** In-4; 1882 ..... 5 fr.

SERRET (**J.-A.**). — **Cours d'Algèbre supérieure.** 5e édition. 2 forts volumes in-8; 1885 ..... 25 fr.

SERRET (**J.-A.**), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Cours de Calcul différentiel et intégral.** 3e édition. 2 forts volumes in-8, avec figures dans le texte; 1886 ..... 24 fr.

TISSERAND (**F.**), Membre de l'Institut et du Bureau des Longitudes. — **Traité de Mécanique céleste.** 3 volumes in-4.

Tome I : *Perturbations des planètes d'après la méthode des constantes arbitraires*; 1889 ..... 25 fr.

Tome II : *Théorie de la figure des corps célestes et de leur mouvement de rotation*; 1891 ..... 28 fr.

Tome III : *Perturbations des planètes d'après la méthode de Hansen. Théorie de la Lune* ..... (*Sous presse.*)

TISSERAND (**F.**), Membre de l'Institut. — **Recueil complémentaire d'Exercices sur le Calcul infinitésimal,** à l'usage des candidats à la Licence et à l'Agrégation des Sciences mathématiques. (Cet Ouvrage forme une suite naturelle à l'excellent *Recueil d'Exercices* de Frenet.) In-8, avec figures dans le texte; 1877 ..... 7 fr. 50 c.

17609. Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.